

**Fehlerabschätzungen für Lösungen
quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen
mittels Finites Elemente**

Alfred Louis

Mainz 1976

FEHLERABSCHÄTZUNGEN FÜR LÖSUNGEN
QUASILINEARER ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
MITTELS FINITER ELEMENTE

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades
"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"
am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz

Alfred Louis
geb. in Elversberg/Saar

Mainz 1976



Berichterstatter :

Prof. Dr. H.N. Mülthei, Mainz

Prof. Dr. F. Natterer, Saarbrücken

Datum der mündlichen Prüfung : 15.7.1976

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Einleitung	1
Kap. I Präliminarien	6
§ 1.1 Sobolev - Räume	6
§ 1.2 Monotone Operatoren	10
§ 1.3 Das Galerkin - Verfahren	13
Kap. II Quasilineare elliptische Differentialgleichungen	16
§ 2.1 Elliptische Differentialgleichungen als monotone Operatorgleichungen	16
§ 2.2 Finite Elemente Räume - Unterräume von $W_0^{m,p}(\Omega)$	26
§ 2.3 Das Galerkin - Verfahren und finite Elemente	27
Kap. III L_p - Fehlerabschätzungen	29
§ 3.1 Voraussetzungen an die Differentialgleichung und Beispiele	29
§ 3.2 Der Fall $p = 2$	41
§ 3.3 Der Fall $p > 2$	52
Literaturverzeichnis	59



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555607_0081

E I N L E I T U N G

In dieser Arbeit werden Fehlerabschätzungen für mittels finiter Elemente bestimmter Näherungslösungen nichtlinearer Randwertaufgaben angegeben. Behandelt wird das homogene Dirichletproblem bei quasilinearen, elliptischen Differentialgleichungen $2m$ -ter Ordnung in einem offenen, beschränkten Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Da man an der Lösbarkeit einer möglichst großen Klasse von Randwertproblemen interessiert ist, kann man sich nicht auf den klassischen Lösungsbegriff beschränken; als Lösungen werden daher auch Funktionen zugelassen, die mit ihren ersten m partiellen, verallgemeinerten Ableitungen lediglich integrierbar sind. Betrachtet man die Differentialgleichungen als (nichtlineare) Operatorgleichungen der Form $Ax = 0$, wobei A eine Abbildung eines Banachraumes X in den Dualraum X^* ist, dann stehen zur Untersuchung dieser Probleme zwei Methoden zur Verfügung. Bei der älteren, der Variationsmethode, wird vorausgesetzt, daß A Gradient einer Funktion f von X nach $\mathbb{R}$ ist, solche Abbildungen werden Potentialoperatoren genannt. Setzt man f als konvex voraus, was der Monotonie von A entspricht, so liefern, unter geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen, die kritischen Punkte von f Lösungen der betrachteten Operatorgleichung. Da aber viele Probleme nicht durch Potentialoperatoren beschrieben werden können, wurde eine neue Theorie entwickelt. Die Methode der monotonen Operatoren, die Anfang der 60-iger Jahre von Minty und Zarantonello angegeben wurde, bietet eine Möglichkeit, ohne diese Voraussetzungen Existenz- und Eindeutigkeitssätze zu beweisen. Bezeichnet man mit $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt zwischen X und X^* , dann wird die schwache Form der obigen Operatorgleichung betrachtet: $(Ax, y) = 0$ für alle $y \in X$. Zur Untersuchung quasilinearer Differentialgleichungen wird in der Literatur sowohl die Variationsmethode als auch die Methode der monotonen Operatoren angewandt, siehe dazu Carroll, [17], Ladyzhenskaya - Ural'tseva, [31], Necas, [41], Vainberg, [54], bzw. Browder, [14] - [16], Carroll, [17], Ciarlet - Schultz - Varga, [22], Gajewski - Gröger - Zacharias, [26], Lions, [34], Necas, [41], Vainberg, [55]. Um auf die Voraussetzung, daß der durch die Differentialgleichung bestimmte Operator A

Potentialoperator sein muß, verzichten zu können, wird hier die Methode der monotonen Operatoren benutzt. Da Eulergleichungen von Variationsproblemen Potentialoperatoren liefern, ist klar, daß diese hier mit berücksichtigt sind. Die Differentialgleichung wird elliptisch genannt, wenn der Operator A monoton ist.

Unter geeigneten Voraussetzungen können die Randwertprobleme in den Sobolevräumen $W^{m,p}$ betrachtet werden; neben Stetigkeitsbedingungen treten Wachstumsbedingungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung auf. Man kann sich nur dann auf den Fall $p = 2$ beschränken, wenn die Koeffizienten höchstens linear anwachsen. Für $p > 2$ erhält man immer noch polynomiale Wachstumsbeschränkungen, die man nur dann umgehen kann, wenn Sobolev - Orlicz - Räume benutzt werden.

Ausgehend von der schwachen Form der Operatorgleichung bietet das Galerkin - Verfahren eine Möglichkeit zur Bestimmung von Näherungslösungen. Die Idee dabei ist, daß man die Gültigkeit der Gleichung $(Ax, y) = 0$ nun nur noch für alle y aus einem endlichdimensionalen Unterraum S von X fordert. Ist A ein Potentialoperator, dann erhält man dabei das gleiche finite Problem wie bei Anwendung des Ritzschen Verfahrens auf das Variationsproblem. Unter denselben Voraussetzungen wie bei der exakten Lösung läßt sich die Existenz einer eindeutigen Galerkin - Lösung $x_G \in S$, die diese Gleichung erfüllt, nachweisen. Zur Fehlerabschätzung in der Norm von X wird vorausgesetzt, daß der Operator A gleichmäßig monoton ist, siehe etwa Ciarlet - Schultz - Varga, [22], oder Gajewski - Gröger - Zacharias, [26]. Bei einer großen Klasse von Differentialgleichungen ist diese Bedingung aber nicht erfüllt. Dagegen liegt oft folgende Situation vor. Man kann X stetig in einen Hilbertraum V einbetten, und die Bedingung der gleichmäßigen Monotonie ist nur bezüglich der Norm von V erfüllt; sie wird im folgenden V - gleichmäßige Monotonie genannt, siehe Beispiel 3.1.2. Unter diesen Voraussetzungen werden hier Fehlerabschätzungen, nun natürlich in der Norm von V , hergeleitet. Solche Untersuchungen waren bislang in der Literatur nicht zu finden.

Faßt man die Randwertprobleme als monotone Operatorgleichungen auf, kann das Galerkin - Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen angewandt werden. Bei den Unterräumen, die hier benutzt werden, handelt es sich um finite Elemente Räume, die zwei wesentliche Eigenschaften haben : als Unterräume von $W_0^{m,p}$ müssen sie die Randbedingungen exakt erfüllen, außerdem müssen Funktionen aus $W^{k,p}$ mit $k > m$ in der $W^{m,p}$ - Norm mit einer Genauigkeit von $O(h^{k-m})$ approximiert werden. Dabei ist $h \in (0,1)$ ein numerischer Parameter. Erstmals wurde die Theorie monotoner Operatoren zur Gewinnung von Existenzsätzen und zur Fehlerabschätzung bei finiten Elementen von Ciarlet - Schultz - Varga, [22], angewandt. Sie geben für gleichmäßig elliptische Differentialgleichungen Abschätzungen in der $W^{m,p}$ - Norm an. Für $p \neq 2$ gibt es aber, wie in Lemma 2.1.2 gezeigt wird, keine gleichmäßig elliptische Quasilinearform. Da für $p > 2$ der Raum $W_0^{m,p}$ in $W_0^{m,2}$ stetig eingebettet ist, kann bei Differentialgleichungen, die die Elliptizitätsbedingung mit der $W^{m,2}$ - Norm erfüllen, das hier entwickelte Konzept der $W^{m,2}$ - gleichmäßigen Elliptizität zur Fehlerabschätzung in der $W^{m,2}$ - Norm angewandt werden, falls die finite Elemente Lösung in der $W^{m,\infty}$ - Norm unabhängig von h beschränkt ist.

Neben den Abschätzungen in der $W^{m,2}$ - Norm, der sogenannten Energie - norm, ist man an Abschätzungen interessiert, bei denen nur die Lösungen selbst und nicht noch ihre Ableitungen verglichen werden. Die grundlegende Idee zur Gewinnung von Fehlerschranken in der L_2 - Norm stammt von Nitsche, [42]. Er hat sie 1968 auf lineare, gewöhnliche Differentialgleichungen angewandt. Diese Methode, der sogenannte Nitsche - Trick, wurde 1972 von Schultz, [49], auf lineare, partielle Differentialgleichungen übertragen. In der gleichen Arbeit hat er auch semilineare Probleme behandelt, siehe auch Douglas - Dupont, [23]. 1975 erschien die Arbeit von Johnson - Thomée, [29], die für das Minimalflächenproblem, eine spezielle, quasilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^2$, mit stückweise linearen finiten Elementen L_r - Fehlerabschätzungen mit $1 \leq r < 2$ angeben. In der vorliegenden Arbeit werden nun für die in § 2.1 beschriebene, allgemeine Klasse quasilinearer Differentialgleichungen $2m$ - ter Ordnung in n Dimensionen L_r - Fehlerabschätzungen hergeleitet. In dem wichtigen Fall $n = 2$

können L_2 - Abschätzungen mit der gleichen Fehlerordnung wie bei linearen Differentialgleichungen bewiesen werden, und zwar für Differentialgleichungen der Ordnung ≥ 4 und für Differentialgleichungen der Ordnung 2, wenn man „höhere“ als stückweise lineare finite Elemente benutzt. Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung und stückweise lineare finite Elemente ergibt sich wie bei Johnson - Thomée, [29], ein $O(h^2)$ nur für die L_r - Normen mit $1 \leq r < 2$. Der Beweis unterscheidet sich wesentlich von dem in [29]. Nach der hier angewandten Vorgehensweise erübrigt sich die Konstruktion einer Bilinearform B mit $B(z^h, u - u^h) = 0$ für alle z^h aus dem finite Elemente Raum, wobei u und u^h die exakte bzw. die finite Elemente Lösung sind. Statt dessen wird hier die gegebene Quasibilinearform benutzt. Bei der Übertragung des Beweises von Johnson - Thomée, [29], auf den Fall $k > 2$ ($m = 1$ und $n = 2$) erhält man nur Abschätzungen für die L_r - Normen mit $1 \leq r < 2$, während in dieser Arbeit ein $O(h^k)$ auch für die L_2 - Norm bewiesen werden kann. Diese Ergebnisse lassen sich mit der hier angegebenen Vorgehensweise nicht verbessern. Nach Fertigstellung dieser Arbeit erschien ein Preprint von Rannacher, [61], in dem beim Minimalflächenproblem mit stückweise linearen finiten Elementen auch in der L_2 - Norm ein $O(h^2)$ angegeben wird. Dabei wird ein $O(h^{1+\varepsilon})$ für die L_∞ - Norm benutzt. Abschätzungen in der L_∞ - Norm sind bislang nur für stückweise lineare finite Elemente bewiesen worden, hier wird darauf nicht eingegangen.

Nach einer Beschreibung der Sobolevräume im ersten Kapitel werden im § 1.2 grundlegende Begriffe der Theorie monotoner Operatoren eingeführt, wobei zugunsten einer straffen Darstellung auf eine vollständige Auflistung der verschiedenen Stetigkeits- und Monotonie definitionen verzichtet wird. Daran anschließend werden Existenz- und Eindeigkeitssätze für Lösungen monotoner Operatorgleichungen angegeben. Eine ausführliche Abhandlung findet man in den Büchern von Browder, [15], und Gajewski - Gröger - Zacharias, [26]. In § 1.3 werden das Galerkin - Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen von Operatorgleichungen angegeben und Existenz- und Eindeigkeits sätze für die Galerkin - Lösung zitiert. Neben den bekannten Fehlerabschätzungen in der Norm des zugrundeliegenden Banachraumes bei

gleichmäßig monotonen Operatoren werden für V - gleichmäßig monotone Operatoren Abschätzungen für den Fehler in der Norm von V bewiesen.

Im ersten Paragraphen des zweiten Kapitels werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die quasilinearen Differentialgleichungen in den Sobolevräumen $W^{m,p}$ behandelt werden können. Weiter wird gezeigt, daß es für $p \neq 2$ keine gleichmäßig elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung gibt, der Beweis läßt sich auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen. Nach einer Beschreibung der finiten Elemente Räume in § 2.2 werden in § 2.3 Fehlerabschätzungen für Galerkin - Lösungen angegeben. Dabei wird wieder zwischen gleichmäßig und $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptischen Differentialgleichungen unterschieden.

In § 3.1 werden die weiteren Voraussetzungen an die Randwertaufgabe formuliert, unter denen die Fehlerabschätzungen hergeleitet werden, im wesentlichen muß der Operator A differenzierbar sein. Nach dem Beweis einer Charakterisierung gleichmäßig elliptischer Differentialgleichungen werden für $p = 2$ und für $p > 2$ Beispiele angeführt. In § 3.2 werden dann für $p = 2$ und gleichmäßig elliptische Differentialgleichungen und in § 3.3 für $p > 2$ und $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptische Operatoren die angekündigten L_p - Abschätzungen durch Modifikation des Nitsche - Tricks bewiesen. Dabei muß im zweiten Fall vorausgesetzt werden, daß die finite Elemente Lösung in der $W^{m,\infty}$ - Norm unabhängig von h beschränkt ist. Das muß jedoch von Fall zu Fall erst nachgewiesen werden, auch hierfür wird ein Beispiel angegeben.

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. H. N. Mülthei für die zahlreichen Diskussionen, die diese Arbeit sehr gefördert haben.

Kapitel I

PRÄLIMINÄRIEN

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Ergebnisse zusammengestellt, die später zur Behandlung der Differentialgleichungen benötigt werden. An eine Beschreibung der Sobolev'schen Räume im ersten Paragraphen schließt sich eine Einführung in die Theorie der monotonen Operatoren und des Galerkin - Verfahrens zur Bestimmung von Näherungslösungen für monotone Operatorgleichungen an.

§ 1.1 SOBOLEV - RÄUME

Eine ausführliche Darstellung der Theorie sowie Beweise der hier formulierten Aussagen findet man in der Monographie von Adams, [1].

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein offenes, beschränktes Gebiet. Wie üblich sind die Räume $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, mit den Normen

$$\|u\|_{p,\Omega} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |u(x)|, & p = \infty, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

versehen. Damit lassen sich die Sobolev - Räume definieren. Für $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $p \in [1, \infty]$ sei

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L_p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L_p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq m\},$$

die Ableitungen sind dabei im verallgemeinerten Sinn zu bilden. α ist ein Multiindex, d.h. ein n - tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen. Es soll gelten

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Das Funktional

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{p,\Omega}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}, & p = \infty, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

ist eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$. Falls Klarheit über das Integrationsgebiet besteht, wird

$$\|\cdot\|_{m,p} \text{ statt } \|\cdot\|_{m,p,\Omega}$$

geschrieben. Für $m = 0$ stimmt diese Norm mit der Norm auf $L_p(\Omega)$ überein,

es wird

$$\| \cdot \|_p \text{ statt } \| \cdot \|_{0,p}$$

verwendet.

Weiter sei

$$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ unendlich oft differenzierbar in } \Omega\}$$

und

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset \Omega\},$$

wobei $\text{supp } u$ der Träger von u ist. Damit läßt sich ein Unterraum von $W^{m,p}(\Omega)$ einführen, der bei der Behandlung homogener Dirichletprobleme benötigt wird. Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist

$$W_0^{m,p}(\Omega) \text{ der Abschluß von } C_0^\infty(\Omega) \text{ bzgl. der Norm } \| \cdot \|_{m,p}.$$

Satz 1.1.1:

Es sei $m \in \mathbb{N}_0$.

i) Für $1 \leq p \leq \infty$ sind $W^{m,p}(\Omega)$ und $W_0^{m,p}(\Omega)$ mit der Norm $\| \cdot \|_{m,p}$ Banachräume.

Insbesondere sind $W^{m,2}(\Omega)$ und $W_0^{m,2}(\Omega)$ Hilberträume.

ii) Für $1 < p < \infty$ sind $W^{m,p}(\Omega)$ und $W_0^{m,p}(\Omega)$ reflexiv und gleichmäßig konvex.

Auf $W^{m,p}(\Omega)$ ist das Funktional

$$|u|_{m,p} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

eine Seminorm. Es gilt jedoch

Lemma 1.1.1:

Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$.

Dann sind $\| \cdot \|_{m,p}$ und $| \cdot |_{m,p}$ auf $W_0^{m,p}(\Omega)$ äquivalente Normierungen.

Beweis: [1], Seite 158.

Der nichttriviale Teil dieser Aussage, nämlich es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{m,p} \leq c \|u\|_{m,p},$$

wird Ungleichung von Poincaré genannt.

Eine wesentliche Rolle bei der Behandlung von Differentialgleichungen in Sobolev'schen Räumen spielen die Sätze, die die Einbettung von $W^{m,p}(\Omega)$ in Räume folgenden Typs sicher stellen :

i) $W^{j,q}(\Omega)$, $j \leq m$ und insbesondere $L_q(\Omega)$;

ii) $C_B^j(\Omega) := \{u \in C^j(\Omega) : D^\alpha u \text{ ist beschränkt in } \Omega \text{ für alle } |\alpha| \leq j\}$.

Die Räume $C_B^j(\Omega)$ sind größer als $C^j(\bar{\Omega})$, da die Elemente nicht gleichmäßig stetig zu sein brauchen. Mit der Norm

$$\|u\|_{C_B^j(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

ist $C_B^j(\Omega)$ ein Banachraum. Die darüber hinaus existierenden Einbettungen von $W^{m,p}(\Omega)$ werden in dieser Arbeit nicht benutzt, können aber ebenso wie der Beweis des folgenden Satzes in [1], Kapitel V, nachgelesen werden.

Satz 1.1.2: (Sobolev'scher Einbettungssatz)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, beschränkt und erfülle die Kegelbedingung.

Es seien $j, m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$.

Dann existieren stetige Einbettungen für

i) $mp < n : W^{j+m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$ mit $1 \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$;

ii) $mp = n : W^{j+m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$ mit $1 \leq q < \infty$;

für $p = 1$, also $m = n$, gilt diese Einbettung auch mit $q = \infty$;

iii) $mp > n : W^{j+m,p}(\Omega) \subset C_B^j(\Omega)$.

Zusatz: Ersetzt man $W^{j+m,p}(\Omega)$ durch $W_0^{j+m,p}(\Omega)$, dann gelten alle Einbettungen auch ohne die Kegelbedingung an Ω .

Daraus ergeben sich für die entsprechenden Normen folgende Abschätzungen

$$\|u\|_{j,q} \leq K_S \|u\|_{m+j,p}$$

bzw.

$$\|u\|_{C_B^j} \leq K_S \|u\|_{m+j,p}.$$

Die dabei auftretenden Konstanten, die auch später immer mit K_S bezeichnet werden, hängen von Ω und den jeweiligen Indizes, nicht aber von u ab.

Der topologische Dualraum von $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist $W^{-m,p'}(\Omega)$:

$$W^{-m,p'}(\Omega) := (W_0^{m,p}(\Omega))^*,$$

wobei p' der konjugierte Exponent von p ist : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Die Elemente $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ sind die stetigen, linearen Funktionale auf $W_0^{m,p}(\Omega)$, es existiert also für jedes f eine Konstante $c \geq 0$, so daß für alle $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$|f(u)| \leq c \|u\|_{m,p}.$$

Statt $f(u)$ wird die Anwendung von f auf u meist mit (f,u) bezeichnet.

Diese f sind Distributionen der Form

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha \text{ mit } f_\alpha \in L_{p'}(\Omega). \quad (1.1.3)$$

Die duale Norm wird wie üblich definiert :

$$\|f\|_{-m,p'} = \sup_{\substack{u \in W_0^{m,p}(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|(f,u)|}{\|u\|_{m,p}}. \quad (1.1.4)$$

Für den Fall $p = 2$ kann man für diese Normen folgenden Interpolations - satz angeben, vgl. [5], Seite 25.

Lemma 1.1.2:

Es sei $u \in W^{t,2}(\Omega)$ und $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s < t$.

Dann gilt für $s \leq r \leq t$:

$$\|u\|_{r,2} \leq K_1 \|u\|_{s,2}^a \|u\|_{t,2}^b \quad (1.1.5)$$

mit

$$a = \frac{t-r}{t-s} \text{ und } b = \frac{r-s}{t-s}.$$

Dabei ist K_1 unabhängig von u .

§ 1.2 MONOTONE OPERATOREN

Den folgenden Betrachtungen liegt stets ein reeller, reflexiver Banachraum X zugrunde. Mit (f, u) wird das Skalarprodukt zwischen $u \in X$ und $f \in X^*$, dem topologischen Dualraum von X , bezeichnet. Weiter sind $\| \cdot \|$ bzw. $\| \cdot \|_*$ die Normen in X bzw. X^* .

Definition 1.2.1:

Ein Operator $A : X \rightarrow X^*$ heißt endlich stetig, wenn A stetig von endlichdimensionalen Unterräumen von X nach X^* bzgl. der schwach - * - Topologie von X^* ist; d.h. sind ein endlich - dimensionaler Unterraum S von X und eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \in S$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in S$ gegeben, dann konvergiert die Folge $\{(Au_n, v)\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen (Au, v) für alle $v \in X$.

Diesem Begriff der Stetigkeit von A wurde der Vorzug gegeben, weil später bei der Anwendung des Galerkin - Verfahrens zur Bestimmung von Näherungslösungen für $Au = f$ endlichdimensionale Unterräume von X benutzt werden. Bei der Monotonie dagegen werden nun die drei wichtigsten Definitionen angegeben.

Definition 1.2.2:

Ein Operator $A : X \rightarrow X^*$ heißt

monoton, wenn für alle $v, w \in X$ gilt

$$(Av - Aw, v - w) \geq 0; \quad (1.2.1)$$

strikt monoton, wenn für alle $v, w \in X$ mit $v \neq w$ gilt

$$(Av - Aw, v - w) > 0; \quad (1.2.2)$$

gleichmäßig monoton (mit der Monotoniekonstanten η),

wenn für alle $v, w \in X$ gilt

$$(Av - Aw, v - w) \geq \eta \|v - w\|^2, \quad \eta > 0. \quad (1.2.3)$$

Jeder gleichmäßig monotone Operator ist strikt monoton, und jeder strikt monotone Operator ist auch monoton.

Aus der Stetigkeit und der Monotonie von A folgt zwar, daß die Lösungsmenge von $Au = f$ konvex und schwach abgeschlossen ist, vgl. [26], Seite 67, sie kann aber auch leer sein. Um die Existenz einer Lösung zu sichern, wird weiter verlangt, daß A koerzitiv ist.

Definition 1.2.3:

Ein Operator $A : X \rightarrow X^*$ heißt koerzitiv, wenn eine auf $[0, \infty)$ erklärte, reelle Funktion σ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = \infty$ existiert, so daß für alle $v \in X$ gilt

$$(Av, v) \geq \sigma(\|v\|) \cdot \|v\|. \quad (1.2.4)$$

Es ist klar, daß jeder gleichmäßig monotone Operator auch koerzitiv ist, und zwar bzgl. $\sigma(r) = nr - \|A0\|_*$.

Satz 1.2.1: (Browder - Minty)

Es sei $A : X \rightarrow X^*$ ein endlich stetiger, monotoner und koerzitiver Operator.

Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$Au = f \quad (1.2.5)$$

bei beliebigem $f \in X^*$ nichtleer, schwach abgeschlossen und konvex.

Den Beweis zu diesem Satz kann man in [14], [15] und [26] finden. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, wird nun zusätzlich verlangt, daß A strikt monoton ist.

Lemma 1.2.1:

Es sei $A : X \rightarrow X^*$ ein endlich stetiger, strikt monotoner und koerzitiver Operator.

Dann existiert zu jedem $f \in X^*$ eine eindeutige Lösung $u \in X$ der Gleichung $Au = f$.

Da gleichmäßig monotone Operatoren sowohl strikt monoton als auch koerzitiv sind, erfüllen sie, wenn sie zusätzlich endlich stetig sind, die Voraussetzungen des Lemmas 1.2.1. Das folgende Lemma liefert eine a priori Abschätzung für die Lösung von Operatorgleichungen.

Lemma 1.2.2:

Es sei $A : X \rightarrow X^*$ ein endlich stetiger und gleichmäßig monotoner Operator.

Dann gilt für die Lösung $u \in X$ der Gleichung $Au = f$ mit $f \in X^*$

$$\|u\| \leq \frac{1}{\eta} \|A0 - f\|_* \quad (1.2.6)$$

Der Beweis ergibt sich trivialerweise aus der gleichmäßigen Monotonie und $Au = f$:

$$\eta \|u\|^2 \leq (Au - A0, u - 0) = (f - A0, u) \leq \|f - A0\|_* \|u\|.$$

▲

§ 1.3 DAS GALERKIN - VERFAHREN

Zur Bestimmung von Näherungslösungen der Gleichung $Au = f$ wird nun das Galerkin - Verfahren benutzt. Die Idee dabei ist, daß man Lösungen der gegebenen Gleichung in endlichdimensionalen Unterräumen von X sucht. Es gelten die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen.

Definition 1.3.1:

Sei S ein endlichdimensionaler Unterraum von X .

Ein Element $u_G \in S$ heißt Galerkin - Lösung der Gleichung $Au = f$ in S , wenn gilt

$$(Au_G, v) = (f, v) \text{ für alle } v \in S. \quad (1.3.1)$$

Satz 1.3.1:

Seien $A : X \rightarrow X^*$ ein endlich stetiger, strikt monotoner und koerzitiver Operator, S ein endlichdimensionaler Unterraum von X .

Dann existiert zu jedem $f \in X^*$ eine eindeutig bestimmte Galerkin - Lösung $u_G \in S$ der Gleichung $Au = f$.

Zum Beweis dieses Satzes vergleiche [14] oder [26]. Für Galerkin - Lösungen gelten unabhängig von S die gleichen a priori Abschätzungen wie für die exakte Lösung, vgl. Lemma 1.2.2.

Lemma 1.3.1:

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 1.3.1. Ist A überdies gleichmäßig monoton, dann gilt

$$\|u_G\| \leq \frac{1}{\eta} \|A0 - f\|_*. \quad (1.3.2)$$

Der Beweis läuft analog zu dem von Lemma 1.2.2. Um Fehlerabschätzungen für die Galerkin - Lösung zu erhalten, muß eine weitere Voraussetzung an A gestellt werden.

Definition 1.3.2:

Ein Operator $A : X \rightarrow X^*$ heißt beschränkt Lipschitz - stetig, wenn für beliebiges $M > 0$ eine nur von M abhängige Konstante $C(M) > 0$ existiert, so daß für alle $v, w \in X$ mit $\|v\|, \|w\| \leq M$ gilt

$$\|Av - Aw\|_* \leq C(M) \|v - w\|. \quad (1.3.3)$$

Lemma 1.3.2:

Es seien $A : X \rightarrow X^*$ endlich stetig, gleichmäßig monoton und beschränkt Lipschitz - stetig, S ein endlichdimensionaler Unterraum von X , u die exakte und u_G die Galerkin - Lösung von $Au = f$ mit $f \in X^*$.

Dann gilt

$$\|u - u_G\| \leq K_2 \cdot \inf\{\|u - v\| : v \in S\}. \quad (1.3.4)$$

Zum Beweis siehe [22], Seite 52/53.

Es wird nun vorausgesetzt, daß der Banachraum X in einen Hilbertraum V stetig eingebettet ist. Bezeichnet man mit $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{X^*}$ und

$\|\cdot\|_V$ die Normen in X, X^* und V , dann gilt

$$\|v\|_V \leq K_E \|v\|_X. \quad (1.3.5)$$

für alle $v \in X$ mit einer von v unabhängigen Einbettungskonstanten K_E .

Die Forderung (1.2.3) der gleichmäßigen Monotonie wird nun gemäß (1.3.5) abgeschwächt.

Definition 1.3.3:

Es sei $X \subset V, V$ ein Hilbertraum.

Der Operator $A : X \rightarrow X^*$ heißt V - gleichmäßig monoton (mit der Monotoniekonstanten μ), wenn für alle $v, w \in X$ gilt

$$(Av - Aw, v - w) \geq \mu \|v - w\|_V^2. \quad (1.3.6)$$

Dabei ist $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt zwischen X und X^* .

Ist $A: V \rightarrow V^*$ gleichmäßig monoton, dann ist A insbesondere strikt monoton auf X .

Lemma 1.3.3:

Es seien X stetig in den Hilbertraum V eingebettet,
 $A: X \rightarrow X^*$ endlich stetig, V - gleichmäßig monoton und
 koerzitiv, $f \in X^*$ beliebig.

i) Dann existiert genau eine Lösung der Gleichung $Au = f$.

ii) Ist S ein endlichdimensionaler Unterraum von X , dann existiert
 genau eine Galerkin - Lösung $u_G \in S$ von $Au = f$ und für $u_G \neq 0$

$$\alpha(\|u_G\|_X) \leq \|f\|_{X^*}. \quad (1.3.7)$$

iii) Erfüllt A weiterhin

$$(Au - Au_G, w) \leq K_3 \|u - u_G\|_V \|w\|_V \quad (1.3.8)$$

für alle $w \in X$, dann gilt

$$\|u - u_G\|_V \leq \frac{K_3}{\mu} \cdot \inf\{\|u - v\|_V : v \in S\}. \quad (1.3.9)$$

Beweis:

Aus den Voraussetzungen folgt, daß A endlich stetig, strikt monoton und koerzitiv ist. Lemma 1.2.1 und Satz 1.3.1 liefern die Existenz einer eindeutigen Lösung u und einer eindeutigen Galerkin - Lösung u_G . Weiter gilt wegen der Koerzitivität von A

$$\alpha(\|u_G\|_X) \|u_G\|_X \leq (Au_G, u_G) = (f, u_G) \leq \|f\|_{X^*} \|u_G\|_X.$$

Damit sind i) und ii) gezeigt.

Die Relation $(Au - Au_G, w) = 0$ für alle $w \in S$ liefert für beliebiges $v \in S$

$$\begin{aligned} \mu \|u - u_G\|_V^2 &\leq (Au - Au_G, u - u_G) \\ &= (Au - Au_G, u - v) \\ &\leq K_3 \|u - u_G\|_V \|u - v\|_V \end{aligned}$$

wegen (1.3.8), also

$$\|u - u_G\|_V \leq \frac{K_3}{\mu} \|u - v\|_V \quad \text{für alle } v \in S.$$

Kapitel II

QUASILINEARE ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

§ 2.1 ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ALS MONOTONE OPERATORGLEICHUNGEN

In einem offenen, beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, wird folgendes formale Dirichletproblem $2m$ -ter Ordnung betrachtet :

Gesucht ist eine Funktion u mit

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \{A_\alpha(x, u, \dots, D^m u)\} = f \text{ für } x \in \Omega, \quad (2.1.1)$$

$$D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ für } |\beta| \leq m-1. \quad (2.1.2)$$

Die A_α sind abhängig von der Ortsvariablen x sowie der Funktion u und deren Ableitungen bis zur Ordnung m , $D^j u$ bezeichne dabei die Ableitungen der Ordnung j . Es handelt sich hier um eine quasilineare Differentialgleichung, da, wie man durch Ausdifferenzieren nachweist, die Ableitungen $2m$ -ter Ordnung linear auftreten. Diese Aufgabenstellung heißt formal, weil die Ableitungen der A_α im allgemeinen nicht zu existieren brauchen. Es wird nun (2.1.1), (2.1.2) eine Quasibilinearform zugeordnet :

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} A_\alpha(x, u, \dots, D^m u) D^\alpha v \, dx. \quad (2.1.3)$$

Dabei seien u und v aus $W_0^{m,p}(\Omega)$, der Index m ist durch die höchste Ordnung der auftretenden Ableitungen und $p \in (1, \infty)$ durch das Wachstumsverhalten der A_α festgelegt, siehe dazu auch (V2).

Gesucht ist nun für gegebenes $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ eine Funktion

$u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, für die gilt

$$a(u, v) = (f, v) \text{ für alle } v \in W_0^{m,p}(\Omega), \quad (2.1.4)$$

sie wird schwache Lösung des homogenen Dirichletproblems (2.1.1), (2.1.2) genannt.

Das Ziel wird es nun sein, durch geeignete Voraussetzungen an die Quasibilinearform a das Problem (2.1.4) im Rahmen der im Kapitel I angegebenen Theorie zu untersuchen. $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist ein reflexiver und gleichmäßig konvexer Banachraum, es können die Ergebnisse des ersten Kapitels mit $X = W_0^{m,p}(\Omega)$ angewandt werden, wenn die Quasibilinearform die im folgenden formulierten Bedingungen erfüllt.

Mit N wird die Anzahl der Ableitungen der Ordnung $|\alpha| \leq m$ bezeichnet, also

$$N = \binom{n+m}{m}.$$

(V1) Die Funktionen

$$A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto A_\alpha(x, y), \quad x \in \Omega, \quad y = (y_1, \dots, y_N)^T \in \mathbb{R}^N$$

seien für alle $|\alpha| \leq m$ meßbar in x für festes $y \in \mathbb{R}^N$ und stetig in y_i , $1 \leq i \leq N$, für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y_i \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

Mit den A_α werden folgende Nemytzkij - Operatoren definiert :

$$\tilde{A}_\alpha : \bigtimes_{i=1}^N \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^\Omega := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\},$$

$$z \rightarrow \tilde{A}_\alpha z$$

$$\text{und } \tilde{A}_\alpha z(x) = A_\alpha(x, z_1(x), \dots, z_N(x)).$$

Für die Funktionen $u, v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ sind $D^\alpha u, D^\alpha v \in L_p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Damit (2.1.3) definiert ist, müssen also die $A_\alpha(\cdot, u, \dots, D^m u)$ aus dem Dualraum von $L_p(\Omega)$, aus $L_{p'}(\Omega)$ mit $1/p + 1/p' = 1$ sein. Der Definitionsbereich der $\tilde{A}_\alpha$ wird wegen $D^\beta u \in L_p(\Omega)$ eingeschränkt auf

$$X := \bigtimes_{|\alpha| \leq m} L_p(\Omega).$$

Nach [54], Satz 19.2 ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für

$$\tilde{A}_\alpha : X \rightarrow L_p(\Omega) : \quad (2.1.6)$$

$$|A_\alpha(x, y)| \leq c \cdot \sum_{|\beta| \leq m} |y_\beta|^{p-1} + c'$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y = \{y_\beta\}_{|\beta| \leq m} \in \mathbb{R}^N$.

Auf Grund der Sobolev'schen Einbettungssätze, siehe Satz 1.1.2, weiß man von den Funktionen $z \in W_0^{m,p}(\Omega)$ sogar :

$$D^\alpha z \in C_B(\Omega) \text{ für } |\alpha| < m - n/p,$$

$$D^\alpha z \in L_{r_\alpha}(\Omega) \text{ für } |\alpha| = m - n/p \text{ und } r_\alpha \in [1, \infty) \text{ beliebig,} \quad (2.1.7)$$

$$D^\alpha z \in L_{p_\alpha}(\Omega) \text{ für } |\alpha| > m - n/p \text{ mit}$$

$$p_\alpha = \frac{np}{n-p(m-|\alpha|)}. \quad (2.1.8)$$

Es sei nun

$$Y := \bigtimes_{|\alpha| < m-n/p} C_B(\Omega) \times \bigtimes_{|\alpha| = m-n/p} L_{r_\alpha}(\Omega) \times \bigtimes_{m-n/p < |\alpha| \leq m} L_{p_\alpha}(\Omega) \subset X.$$

Dann läßt sich die Forderung (2.1.6) abschwächen zu

$$\tilde{A}_\alpha : Y \rightarrow L_{q_\alpha}(\Omega) \quad (2.1.9)$$

mit

$$q_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für } |\alpha| < m-n/p, \\ r'_\alpha & \text{für } |\alpha| = m-n/p \text{ und } 1/r_\alpha + 1/r'_\alpha = 1, \\ p'_\alpha & \text{für } m-n/p < |\alpha| \leq m \text{ und } 1/p_\alpha + 1/p'_\alpha = 1. \end{cases}$$

Eine hinreichende Bedingung für (2.1.9) ist

$$(V2) \quad |A_\alpha(x, y)| \leq g\left(\sum_{|\beta| < m-n/p} |y_\beta|\right) \cdot \left\{ 1 + \sum_{|\beta| = m-n/p} |y_\beta|^{r_{\alpha\beta}} + \sum_{m-n/p < |\beta| \leq m} |y_\beta|^{c_{\alpha\beta}} \right\}$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y = (y_\beta)_{|\beta| \leq m} \in \mathbb{R}^N$

mit

$g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ meßbar und wesentlich beschränkt für
beschränktes Argument,

$r_{\alpha\beta} \in [1, \infty)$ beliebig,

$$p-1 \leq c_{\alpha\beta} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \leq p_\beta & \text{für } m-n/p, p_\beta \text{ aus (2.1.8),} \\ < p_\beta/p'_\alpha & \text{für } |\alpha| = m-n/p, 1/p_\alpha + 1/p'_\alpha = 1, \\ \leq p_\beta/p'_\alpha & \text{für } |\alpha| > m-n/p. \end{array} \right.$$

Lemma 2.1.1:

Wenn die Funktionen A_α die Voraussetzungen (V1), (V2) erfüllen, dann existiert zu jedem $z \in W_0^{m,p}(\Omega)$ eine Konstante $C(\|z\|_{m,p})$, so daß für alle $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$|a(z, v)| \leq C(\|z\|_{m,p}) \|v\|_{m,p}.$$

Zum Beweis dieses Lemmas muß nachgewiesen werden, daß das Produkt aus $D^\alpha v$ mit $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ und der rechten Seite von (V2) integrierbar ist. Mit Hilfe der Sobolev'schen Einbettungssätze ist (V2) dabei möglichst schwach formuliert worden, vgl. auch [22], Seite 54/55. Die (V2) entsprechende Voraussetzung ist dort etwas stärker, es wird $g \in C([0, \infty))$ und $r_{\alpha\beta} = 1$ gefordert. Diese Bedingung schließt i. a. aus, daß wie hier auch Inhomogenitäten berücksichtigt werden können, siehe auch den Beweis des Lemmas 3.1.1.

Als Folgerung aus Lemma 2.1.1 ergibt sich, daß die Quasibilinearform a für festes $z \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ein stetiges, lineares Funktional in $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ist, es existiert also ein Element $Az \in W^{-m,p'}(\Omega)$ mit

$$a(z, v) = (Az, v) \quad \text{für alle } v \in W_0^{m,p}(\Omega). \quad (2.1.10)$$

Dadurch wird ein Operator

$$A : W_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{-m,p'}(\Omega) \quad (2.1.11)$$

definiert, für den nach [22], Seite 56, folgendes Lemma gilt.

Lemma 2.1.2:

Unter den Voraussetzungen (V1), (V2) ist der in (2.1.10) definierte Operator A endlich stetig.

Im ersten Kapitel sind für die Lösung der Operatorgleichung $Au = f$ Existenzsätze unter Monotoniebedingungen an A angegeben worden. Diese werden nun auf die Quasibilinearform a übertragen.

Definition 2.1.1:

Die Quasibilinearform a heißt elliptisch, wenn der in (2.1.10) definierte Operator A monoton ist, d.h. wenn für alle v und w aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$a(v, v-w) - a(w, v-w) \geq 0.$$

Sie heißt strikt elliptisch, wenn A strikt monoton ist, d.h. wenn für alle v, w $\in W_0^{m,p}(\Omega)$ mit $v \neq w$ gilt

$$a(v, v-w) - a(w, v-w) > 0.$$

Sie heißt gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten n, wenn A gleichmäßig monoton ist, d.h. wenn für alle v, w $\in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$a(v, v-w) - a(w, v-w) \geq n \|v-w\|_{m,p}^2. \quad (2.1.12)$$

Sie heißt koerzitiv, wenn A koerzitiv ist, d.h. wenn eine Funktion $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = \infty$ existiert, so daß für alle v $\in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$a(v, v) \geq \sigma(\|v\|_{m,p}) \|v\|_{m,p}. \quad (2.1.13)$$

Bedingung (2.1.12) kann wegen der Äquivalenz der Normen $\| \cdot \|_{m,p}$ und $|\cdot|_{m,p}$ auf $W_0^{m,p}(\Omega)$ durch die leichter nachzuprüfende Bedingung

$$a(v, v-w) - a(w, v-w) \geq \gamma |v-w|_{m,p}^2 \quad (2.1.14)$$

ersetzt werden.

Die Definition der gleichmäßigen Elliptizität ist nur für $p = 2$ sinnvoll, denn im folgenden Lemma wird gezeigt, daß es für $p \neq 2$ keine gleichmäßig elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung gibt, die den schwachen Voraussetzungen (V1), (V2) genügt. Dies geschieht dadurch, daß Funktionen konstruiert werden, die die Bedingung (2.1.14) verletzen. Durch die Wahl entsprechender Funktionen kann dieses Ergebnis auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen werden.

Lemma 2.1.2:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $m = 1$.

Dann gibt es für $p \neq 2$ keine auf Ω gleichmäßig elliptische Quasibilinearform zweiter Ordnung, die den Bedingungen (V1), (V2) genügt.

Beweis:

Der Beweis wird indirekt geführt. Unter der Annahme, es existiere eine Quasibilinearform a , die die Bedingung (2.1.14) für ein $\gamma > 0$ und für alle $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ erfüllt, muß insbesondere für $w = 0$ gelten

$$\gamma |v|_{1,p}^2 \leq a(v, v) - a(0, v) \text{ für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.1.15)$$

Die rechte Seite von (2.1.15) wird gemäß (V2) nach oben abgeschätzt durch ein $F(v, Dv)$ und in Abhängigkeit von γ dann eine Funktion $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ angegeben mit

$$\gamma |v|_{1,p}^2 > F(v, Dv) \geq a(v, v) - a(0, v)$$

was ein Widerspruch zu (2.1.15) ist.

Im Falle $m = 1$ ist die Quasibilinearform

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \left\{ A_0(x, v, Dv) \cdot w + \sum_{|\alpha| \leq 1} A_{\alpha}(x, v, Dv) D^{\alpha} w \right\} dx.$$

Nach (V2) kann $a(v, v) - a(0, v)$ abgeschätzt werden durch

$$a(v, v) - a(0, v) \leq c_1 |v|_{1,p}^p + c_2 \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} v| dx. \quad (2.1.16)$$

Für $p > n$ muß dabei

$$|v|_{1,p} \leq K \quad (2.1.17)$$

vorausgesetzt werden, damit wegen

$$|v(x)| \leq \|v\|_{\infty} \leq K_S \|v\|_{1,p} \leq K_S c |v|_{1,p} \leq K_S c K \text{ für alle } x \in \Omega$$

$g(|v(x)|)$ durch

$$\bar{g} := \sup \{ g(s) : 0 \leq s \leq K_S c K \}$$

unabhängig von v abgeschätzt werden kann.

Im folgenden wird nun die Funktion $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ konstruiert, mit der der Widerspruch hergeführt wird.

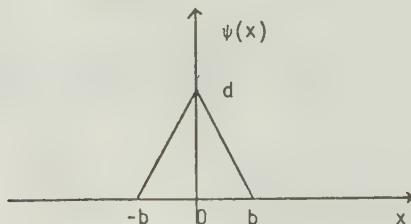
Sei

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

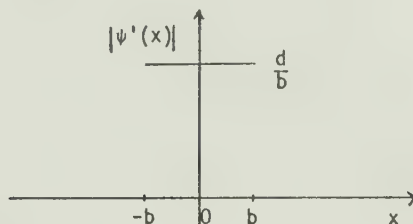
$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{d}{b}x + d & \text{für } x \in [-b, 0], \\ -\frac{d}{b}x + d & \text{für } x \in [0, b], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $b, d > 0$.



Der Betrag der Ableitung von ψ ist

$$|\psi'(x)| = \begin{cases} \frac{d}{b} & \text{für } x \in [-b, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Sei nun $\bar{x} \in \Omega$. Da Ω offen ist und die Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, existiert eine offene Umgebung

$$U_\delta(\bar{x}) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - y\|_\infty < \delta\}, \quad (2.1.17)$$

die ganz in Ω liegt. Dabei ist für $y \in \mathbb{R}^n$

$$\|y\|_\infty := \max \{ |y_i| : 1 \leq i \leq n \}.$$

Die Funktion v wird nun wie folgt definiert

$$v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto v(x) = \prod_{i=1}^n \psi(x_i - \bar{x}_i).$$

$$\text{Dann ist } \text{supp } v = \{y \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - y\|_\infty \leq b\}. \quad (2.1.18)$$

Es sind

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |v| \, dx &= b^n d^n, \\ \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha v| \, dx &= 2b^{n-1} d^n, \quad |\alpha| = 1, \\ |v|_{1,p,\mathbb{R}^n}^p &= 2^n n^{(p+1)^{1-n}} d^{pn} b^{n-p}. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} F_1(b,d) &= |v|_{1,p,\mathbb{R}^n}^p, \\ F_2(b,d) &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha v| \, dx = b^{n-1} d^n (b+2n). \end{aligned}$$

Im folgenden wird die Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$F(b,d) = f \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } f_i > 0, i = 1,2,$$

untersucht. Löst man $F_1(b,d) = f_1$ nach d^n auf und setzt d^n in $F_2(b,d)$ ein, so ergibt sich eine Gleichung $\phi(b) = f_2$ mit

$$\phi(b) = (2^{n(p+1)} b^{n(p-1)/p})^{1-n} b^{n(p-1)/p} (b+2n)^{1/p},$$

die für alle $f_2 > 0$ eine eindeutige Lösung $b > 0$ hat. Für

$$f_1 \in (0,K) \cap \begin{cases} (0, (\frac{\gamma}{c_1})^{p/(p-2)}) & \text{für } p > 2 \\ (\frac{c_1}{\gamma})^{p/(2-p)}, \infty) & \text{für } p < 2 \end{cases}$$

wobei $K > (\frac{c_1}{\gamma})^{p/(2-p)}$ für $n = 1$ und $1 < p < 2$ vorausgesetzt wird, ist

$$\gamma f_1^{2/p} - c_1 f_1 =: \Delta > 0.$$

Da ϕ strikt monoton wachsend und $\phi(0) = 0$ ist, ist wegen $\delta > 0$ auch $\phi(\delta) > 0$. Wählt man nun

$$f_2 \in (0, \frac{\Delta}{c_2}) \cap (0, \phi(\delta)), \text{ dann gilt}$$

$$\gamma f_1^{2/p} > c_1 f_1 + c_2 f_2.$$

Die mit diesen f_1, f_2 gefundene Lösung $(\bar{b}, \bar{d})$ von $F(b,d) = f$ liefert somit eine Funktion $\bar{v}$ mit $\text{supp } \bar{v} \subset U_\delta(\bar{x}) \subset \Omega$, also $\bar{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} \gamma |\bar{v}|_{1,p,\Omega}^2 &> c_1 |\bar{v}|_{1,p,\Omega}^p + c_2 \sum_{|\alpha| \leq m} \int |D^\alpha \bar{v}| dx \\ &\geq a(\bar{v}, \bar{v}) - a(0, \bar{v}), \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

was ein Widerspruch zur Annahme (2.1.15) ist. ▲

In den Arbeiten von Ciarlet - Schultz - Varga, [22], und Gajewski - Gröger - Zacharias, [26], werden auch für $p \neq 2$ zur Fehlerabschätzung bei Galerkin - Lösungen die gleichmäßige Elliptizität der Quasilinearform vorausgesetzt. Bei dem in [26] betrachteten Typ nicht - linearer Probleme, siehe (1.5), Seite 68, läßt sich sofort zeigen, daß für $p \neq 2$ Bedingung (2.1.14) nicht für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ erfüllt sein kann. Darauf wird dort nicht eingegangen, auch nicht in Lemma 1.6, Seite 69/70, wo für verschiedene Monotoniekriterien hinreichende Bedingungen angegeben werden, es wird nur der Fall $p = 2$ erwähnt.

Für $p > 2$ ist $W_0^{m,p}(\Omega)$ in $W_0^{m,2}(\Omega)$ eingebettet, dort kann das in Kapitel I entwickelte Konzept der V - gleichmäßigen Elliptizität mit $V = W_0^{m,2}(\Omega)$ angewandt werden. Deshalb soll von nun ab

$$p \geq 2$$

(2.1.20)

vorausgesetzt werden.

Satz 2.1.1:

Die Quasibilinearform erfülle die Voraussetzungen (V1), (V2).

- i) Ist a elliptisch und koerzitiv, dann existiert zu jedem $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ (mindestens) eine Lösung $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ von (2.1.4)
- ii) Sei $p = 2$. Ist a gleichmäßig elliptisch, dann existiert zu jedem $f \in W^{-m,2}(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$ und es gilt

$$\|u\|_{m,2} \leq \frac{1}{\eta} \|A_0 - f\|_{-m,2}. \quad (2.1.21)$$

- iii) Sei $p > 2$. Ist a $W_0^{m,2}$ - gleichmäßig elliptisch und koerzitiv, dann existiert zu jedem $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ und es gilt für $u \neq 0$

$$\sigma(\|u\|_{m,p}) \leq \|f\|_{-m,p'}. \quad (2.1.22).$$

Differentialgleichungen, die die Voraussetzungen ii) bzw. iii) dieses Satzes erfüllen, sind in den Beispielen 3.1.1 bzw. 3.1.2 angegeben.

§ 2.2 FINITE ELEMENTE RÄUME - UNTERRÄUME VON $W_0^{m,p}(\Omega)$

Um das in § 1.3 beschriebene Galerkin - Verfahren anwenden zu können, braucht man endlichdimensionale Unterräume von $X = W_0^{m,p}(\Omega)$; die Funktionen, mit denen die Lösung approximiert wird, müssen also die Randbedingungen exakt erfüllen. Ähnlich wie in [5] oder [45] wird nun die Klasse der hier zugelassenen Unterräume beschrieben.

Definition 2.2.1:

$S_0^h \subset W_0^{m,p}(\Omega)$, $0 < h < 1$, heißt ein k, m - reguläres System, wenn gilt

- i) $\dim S_0^h < \infty$, $k > m$;
- ii) sei $v \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{r,s}(\Omega)$ mit $r > m$, $s \in [2, p]$,
dann existiert ein $\tilde{v} \in S_0^h$ mit

$$\|v - \tilde{v}\|_{j,s} \leq K_4 h^{t-j} \|v\|_{t,s} \quad \text{für } 0 \leq j \leq m, \quad (2.2.1)$$

mit $t = \min(k, r)$ und K_4 unabhängig von v und h .

Jedes Element $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ soll also in der L_p - Norm mindestens von der Ordnung $O(h^m)$ approximiert werden können. Ist v glatter, steigt die erreichbare Genauigkeit bis maximal $O(h^k)$, wenn $v \in W^{k,p}(\Omega)$ ist. Beispiele für solche k, m - regulären Systeme, die auch finite Elemente Räume genannt werden, sind für Gebiete mit polyedrischem Rand einfach anzugeben: durch Zerlegung von Ω in simpliziale oder quadrilaterale Gebilde und geeigneter Interpolation dort, siehe etwa [20], kann man die gewünschte Genauigkeit erreichen. Der Parameter k ist im Falle der Interpolation mit Polynomen dann um eins höher als der Gesamtgrad der Polynome pro Element. Für Gebiete mit glattem Rand kann man Kugeln oder Ellipsoide als Beispiele anführen, bei denen in den entsprechenden Koordinatensystemen wie bei polyedrischen Gebieten verfahren wird. Schwieriger wird es, wenn Ω keinen solch angenehmen Rand hat. Dann kann man zwar noch Unterräume konstruieren, deren Funktionen die Randbedingungen exakt erfüllen, siehe etwa [38], [47] oder [48], jedoch wird dadurch die Genauigkeit am Rand verschlechtert. Auf die Methoden, ohne die Erfüllung der Randbedingungen auszukommen, wird hier nicht eingegangen, siehe dazu [6], [8] oder [44].

§ 2.3 DAS GALERKIN - VERFAHREN UND FINITE ELEMENTE

Nach der Interpretation der gegebenen Randwertaufgabe als monotone Operatorgleichung kann nun das Galerkin - Verfahren mit den im vorigen Paragraphen eingeführten Unterräumen angewandt werden. Im folgenden wird mit u^h die Galerkin - Lösung der Gleichung (2.1.4) bezeichnet, u^h wird auch finite Elemente Lösung genannt :

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h) \text{ für alle } v^h \in S_0^h. \quad (2.3.1)$$

Die Ergebnisse aus § 1.3 lassen sich nun übertragen.

Lemma 2.3.1: (Ciarlet - Schultz - Varga)

Es sei $p = 2$.

Die Quasibilinearform erfülle die Voraussetzungen (V1), (V2) und sei gleichmäßig elliptisch, $S_0^h \subset W_0^{m,2}(\Omega)$ sei ein k, m - reguläres System.

Dann existiert eine eindeutige finite Elemente Lösung $u^h \in S_0^h$ von (2.3.1); sie genügt der a priori Abschätzung

$$\|u^h\|_{m,2} \leq \frac{1}{\alpha} \|A_0 f\|_{-m,2}. \quad (2.3.2)$$

Ist A aus (2.1.10) überdies beschränkt Lipschitz - stetig und die exakte Lösung $u \in W^{k,2}(\Omega)$, dann gilt

$$\|u - u^h\|_{m,2} \leq K_5 h^{k-m} \|u\|_{k,2} \quad (2.3.3)$$

wobei K_5 unabhängig von u und h ist.

Der Beweis ergibt sich trivialerweise aus Lemma 1.3.2.

Es bleibt nur noch die Abschätzung (2.3.3) zu zeigen.

Nach Lemma 1.3.2 gilt

$$\|u - u^h\|_{m,2} \leq K_2 \cdot \inf \{ \|u - v\|_{m,2} : v \in S_0^h \}.$$

Nach Definition 2.2.1 existiert zu $u \in W^{k,2}(\Omega)$ ein $\tilde{u} \in S_0^h$ mit

$$\|u - \tilde{u}\|_{m,2} \leq K_4 h^{k-m} \|u\|_{k,2},$$

also gilt

$$\|u - u^h\|_{m,2} \leq K_2 K_4 h^{k-m} \|u\|_{k,2}.$$

Für $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptische Differentialgleichungen gilt entsprechend

Lemma 2.3.2:

Es sei $p > 2$.

Die Quasibilinearform erfülle die Voraussetzungen (V1), (V2), sei $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptisch und koerziv,

$S_0^h \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ sei ein k,m - reguläres System.

Dann existiert zu jedem $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ eine eindeutige finite Elemente Lösung $u^h \in S_0^h$ von (2.3.1); sie genügt der a priori Abschätzung im Falle $u^h \neq 0$

$$\sigma(\|u^h\|_{m,p}) \leq \|f\|_{-m,p'}. \quad (2.3.4)$$

Erfüllt a überdies die Bedingung (1.3.8) aus Lemma 1.3.3 und ist die exakte Lösung $u \in W^{k,2}(\Omega)$, dann gilt

$$\|u - u^h\|_{m,2} \leq K_6 h^{k-m} \|u\|_{k,2}. \quad (2.3.5)$$

Der Beweis läuft analog zu dem des Lemmas 2.3.1, nur wird hier Lemma 1.3.3 statt 1.3.2 benutzt. Die für die Abschätzung (2.3.5) hinreichende Bedingung (1.3.8) ist erfüllt, wenn u^h in der $W^{m,\infty}$ - Norm unabhängig von h beschränkt ist.

Kapitel III

L_p - FEHLERABSCHÄTZUNGEN

§ 3.1 VORAUSSETZUNGEN AN DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG UND BEISPIELE

Genau wie beim Nitsche - Trick für lineare Differentialgleichungen müssen nun Glattheitsbedingungen bezüglich des Randes von Ω und der Koeffizienten der Differentialgleichung gestellt werden. Die in § 2.1 angegebene Voraussetzung (V1) wird nun verschärft zu

$$(V1') \quad A_\alpha \in C^{|\alpha|+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N) \text{ für alle } |\alpha| \leq m.$$

Bezeichnet man mit

$$A_{\alpha\beta}(x,y) := \frac{\partial}{\partial y_\beta} A_\alpha(x,y) \quad (3.1.1)$$

$$\text{mit } x \in \Omega, y = (y_\beta)_{|\beta| \leq m} \in \mathbb{R}^N,$$

dann soll die Bilinearform

$$b(z;v,w) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x,z, \dots, D^m z) D^\alpha v D^\beta w \, dx \quad (3.1.2)$$

für alle $v, w, z \in W_0^{m,p}(\Omega)$ existieren. Da das Produkt zweier $W^{m,p}$ - Funktionen auftritt, ist klar, daß die folgenden Untersuchungen nur für

$$p \geq 2 \quad (3.1.3)$$

gelten. Mit der Bilinearform b wird die Ableitung von der Quasibilinearform $a(v,w)$ bzgl. v gebildet. $b(u; \dots)$ wird später zum Beweis der L_p - Abschätzungen benutzt. Im Falle linearer Differentialgleichungen überlegt man sich sofort, daß $a(v,w) = b(z;v,w)$ für alle $v,w,z \in W^{m,2}(\Omega)$ gilt.

Genau wie bei den A_α ergeben sich für die $A_{\alpha\beta}$ Beschränkungen, die sicher stellen, daß die $A(\cdot, \dots, D^m z)$ aus dem Dualraum des Raumes sind, in dem die $D^\alpha v \cdot D^\beta w$ liegen. Ohne Anwendung der Sobolev'schen Einbettungssätze erhält man

$$|A_{\alpha\beta}(x,y)| \leq c \sum_{|\gamma| \leq m} |y_\gamma|^{p-2} + c_1, \quad c_1 \in L_{p/(p-2)}(\Omega). \quad (3.1.4)$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y \in \mathbb{R}^N$.

Diese Bedingung findet man etwa in [17] oder in [24], [25], wo im Fall $p = 2$ und $m = 1$ verlangt wird

$$|A_{\alpha\beta}(x,y)| \leq c$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y \in \mathbb{R}^3$.

(3.1.4) kann man in folgender Form abschwächen.

$$(V3) \quad |A_{\alpha\beta}(x,y)| \leq g_1 \left(\sum_{|Y| < m-n/p} |y_Y| \right) \cdot \left\{ 1 + \sum_{|Y|=m-n/p} |y_Y|^{r_{\alpha\beta Y}} + \sum_{m-n/p < |Y| \leq m} |y_Y|^{c_{\alpha\beta Y}} \right\}$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y \in \mathbb{R}^N$ mit

$g_1 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ meßbar und wesentlich beschränkt für beschränktes Argument,

$$r_{\alpha\beta Y} \begin{cases} = 0 & \text{für } p = 2 \text{ und } |\alpha| = |\beta| = m, \\ \in [1, \infty) & \text{beliebig sonst,} \end{cases}$$

$$p-2 \leq c_{\alpha\beta Y} \leq \begin{cases} p_Y & \text{für } |\alpha|, |\beta| < m-n/p, \\ p_Y/p'_\beta & \text{für } |\alpha| < m-n/p \leq |\beta|, \\ p_Y/p'_\alpha & \text{für } |\beta| < m-n/p \leq |\alpha|, \\ p_Y/p'_{\alpha\beta} & \text{für } |\alpha|, |\beta| \geq m-n/p. \end{cases}$$

Dabei sind

$$p_\alpha \begin{cases} = \frac{np}{n-p(m-|\alpha|)}, & \text{falls } |\alpha| > m-n/p, \\ < \infty, & \text{falls } |\alpha| = m-n/p, \end{cases}$$

$$p_{\alpha\beta} \begin{cases} = \frac{np}{2n-p(2m-|\alpha|-|\beta|)}, & \text{falls } |\alpha| + |\beta| > 2(m-n/p), \\ < \infty, & \text{falls } |\alpha| + |\beta| = 2(m-n/p). \end{cases}$$

p'_α und $p'_{\alpha\beta}$ sind die konjugierten Exponenten von p_α und $p_{\alpha\beta}$.

Lemma 3.1.1:

Wenn die Funktionen A_α die Voraussetzungen (V1'), (V3) erfüllen, dann existiert zu jedem $z \in W_0^{m,p}(\Omega)$ eine Konstante $K_7(\|z\|_{m,p})$, so daß für alle $v, w \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$|b(z; v, w)| \leq K_7(\|z\|_{m,p}) \|v\|_{m,p} \|w\|_{m,p}. \quad (3.1.5)$$

Dabei ist $K_7(r)$ monoton wachsend in r .

Beweis:

Es genügt, die Behauptung für die in (V3) maximal zulässigen $c_{\alpha\beta\gamma}$ zu zeigen.

Für $|\gamma| > m-n/p$ ist $D^\gamma z \in C_B(\Omega)$ und so $\|D^\gamma z\|_\infty \leq K_S \|z\|_{m,p}$.

Daher ist

$$\sum_{|\gamma| < m-n/p} |D^\gamma z(x)| \leq c_1 \|z\|_{m,p} \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Mit der Konstanten

$$\bar{g}_1(\|z\|_{m,p}) := \text{ess sup } \{ g_1(s) : 0 \leq s \leq c_1 \|z\|_{m,p} \} \geq 0$$

gilt dann für alle $|\alpha|, |\beta| \leq m$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, z, \dots, D^m z) D^\alpha v D^\beta w \, dx \right| &\leq \\ &\leq \bar{g}_1(\|z\|_{m,p}) \cdot \left\{ \int_{\Omega} |D^\alpha v| |D^\beta w| \, dx + \sum_{|\gamma|=m-n/p} \int_{\Omega} |D^\gamma z|^{c_{\alpha\beta\gamma}} |D^\alpha v| |D^\beta w| \, dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m-n/p < |\gamma| \leq m} \int_{\Omega} |D^\gamma z|^{c_{\alpha\beta\gamma}} |D^\alpha v| |D^\beta w| \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Es werden nun die einzelnen Terme in der geschweiften Klammer abgeschätzt.

$$a) \int_{\Omega} |D^\alpha v| |D^\beta w| \, dx \leq c_2 \|D^\alpha v\|_p \|D^\beta w\|_p \text{ mit}$$

$$c_2 = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 2, \\ \text{vol}(\Omega)^{(p-2)/p} & \text{für } p > 2, \end{cases}$$

$$\leq c_2 \|v\|_{m,p} \|w\|_{m,p}.$$

$$b) I := \int_{\Omega} |D^{\gamma} z|^{r_{\alpha\beta\gamma}} |D^{\alpha} v| |D^{\beta} w| dx.$$

1. Fall : $p > 2$:

$$I \leq \|D^{\gamma} z\|_{r_{\alpha\beta\gamma}^{p/(p-2)}}^{r_{\alpha\beta\gamma}} \|D^{\alpha} v\|_p \|D^{\beta} w\|_p.$$

Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz ist $D^{\gamma} z \in L_r(\Omega)$ für jedes $r \in [1, \infty)$. Wegen $p > 2$ ist $r_{\alpha\beta\gamma}^{p/(p-2)} \in [1, \infty)$ und daher

$$\|D^{\gamma} z\|_{r_{\alpha\beta\gamma}^{p/(p-2)}} \leq K_S \|z\|_{m,p}.$$

Insgesamt gilt dann

$$I \leq (K_S \|z\|_{m,p})^{r_{\alpha\beta\gamma}} \|v\|_{m,p} \|w\|_{m,p}.$$

2. Fall : $p = 2$:

i) $|\alpha| + |\beta| < 2m$.

Es sind $D^{\alpha} v \in L_{p_{\alpha}}(\Omega)$, $D^{\beta} w \in L_{p_{\beta}}(\Omega)$ und $D^{\alpha} v \cdot D^{\beta} w \in L_{p_{\alpha\beta}}(\Omega)$.

Wegen $p_{\alpha\beta} > 1$ ist der konjugierte Exponent $p'_{\alpha\beta} < \infty$ und daher

$$\begin{aligned} I &\leq \|D^{\gamma} z\|_{r_{\alpha\beta\gamma}^{p'_{\alpha\beta}}}^{r_{\alpha\beta\gamma}} \|D^{\alpha} v\|_p \|D^{\beta} w\|_p \\ &\leq (K_S \|z\|_{m,2})^{r_{\alpha\beta\gamma}} \|v\|_{m,2} \|w\|_{m,2}. \end{aligned}$$

ii) $|\alpha| = |\beta| = m$.

In diesem Fall ist $r_{\alpha\beta\gamma} = 0$ und

$$I \leq \|v\|_{m,2} \|w\|_{m,2}.$$

$$c) I := \int_{\Omega} |D^{\gamma} z|^{c_{\alpha\beta\gamma}} |D^{\alpha} v| |D^{\beta} w| dx.$$

1. Fall : $|\alpha|, |\beta| < m - n/p$, also $D^{\alpha} v, D^{\beta} w \in C_B(\Omega)$.

Wegen $D^{\gamma} z \in L_{p_Y}(\Omega)$ ist hier $c_{\alpha\beta\gamma} = p_Y$ der maximal mögliche Exponent :

$$\begin{aligned} I &\leq \|D^{\gamma} z\|_{p_Y}^{p_Y} \|D^{\alpha} v\|_{\infty} \|D^{\beta} w\|_{\infty} \\ &\leq c_3 \|z\|_{m,p} \|v\|_{m,p} \|w\|_{m,p}. \end{aligned}$$

2. Fall : $|\alpha| < m-n/p \leq |\beta|$.

Nun ist $D^\alpha v \in C_B(\Omega)$, $D^\beta w \in L_{p_\beta}(\Omega)$ und

$$I \leq \|D^\alpha v\|_\infty \left(\int_\Omega |D^\gamma z|^{c_{\alpha\beta\gamma} p'_{\alpha\beta}} dx \right)^{1/p'_\beta} \|D^\beta w\|_{p_\beta}.$$

Wegen $D^\gamma z \in L_{p_\gamma}(\Omega)$ darf $c_{\alpha\beta\gamma} p'_\beta$ höchstens gleich p_γ sein, also

$c_{\alpha\beta\gamma} = p_\gamma/p'_\beta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I &\leq \|D^\gamma z\|_{p_\gamma}^{c_{\alpha\beta\gamma}} \|D^\alpha v\|_\infty \|D^\beta w\|_{p_\beta} \\ &\leq c_4 \|z\|_{m,p}^{c_{\alpha\beta\gamma}} \|v\|_{m,p} \|w\|_{m,p}. \end{aligned}$$

3. Fall : $|\beta| < m-n/p \leq |\alpha|$.

Hier wird analog zum zweiten Fall vorgegangen.

4. Fall : $|\alpha|, |\beta| \geq m-n/p$.

Jetzt sind $D^\alpha v \in L_{p_\alpha}(\Omega)$, $D^\beta w \in L_{p_\beta}(\Omega)$ und $D^\alpha v \cdot D^\beta w \in L_{p_{\alpha\beta}}(\Omega)$.

Hier gilt

$$I \leq \left(\int_\Omega |D^\gamma z|^{c_{\alpha\beta\gamma} p'_{\alpha\beta}} dx \right)^{1/p'_{\alpha\beta}} \|D^\alpha v\|_{p_\alpha} \|D^\beta w\|_{p_\beta}.$$

Der höchst mögliche Exponent bei $|D^\gamma z|$ ist p_γ , da $D^\gamma z \in L_{p_\gamma}(\Omega)$, also

$$c_{\alpha\beta\gamma} = p_\gamma/p'_{\alpha\beta}$$

und damit

$$\begin{aligned} I &\leq \|D^\gamma z\|_{p_\gamma}^{c_{\alpha\beta\gamma}} \|D^\alpha v\|_{p_\alpha} \|D^\beta w\|_{p_\beta} \\ &\leq c_5 \|z\|_{m,p}^{c_{\alpha\beta\gamma}} \|v\|_{m,p} \|w\|_{m,p}. \end{aligned}$$

Korollar 3.1.1:

Erfüllen die Funktionen A_α die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V3), dann ist der in (2.1.10) definierte Operator A beschränkt
Lipschitz - stetig.

Beweis:

Es seien $v, w, z \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Die Taylorentwicklung der reellwertigen Funktion $\Psi : W_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Psi(v) = (Av, z) = a(v, z)$$

liefert

$$\begin{aligned} \Psi(v) - \Psi(w) &= a(v, z) - a(w, z) \\ &= b(\xi; z, v-w) \end{aligned}$$

mit $\xi = v + \theta(w-v)$, $\theta \in (0,1)$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|Av-Aw\|_{-m,p} &= \sup\{ |(Av-Aw, z)| / \|z\|_{m,p} : z \in W_0^{m,p}(\Omega) - \{0\} \} \\ &= \sup\{ |b(\xi; z, v-w)| / \|z\|_{m,p} : z \in W_0^{m,p}(\Omega) - \{0\} \} \\ &\leq K_7(\|\xi\|_{m,p}) \|v-w\|_{m,p}. \end{aligned}$$

Für $\|v\|_{m,p}, \|w\|_{m,p} \leq M$ ist $\|\xi\|_{m,p} \leq M$ und so

$$\|Av-Aw\|_{-m,p} \leq C(M) \|v-w\|_{m,p}. \quad \blacktriangle$$

Aus dem Beweis des Korollars 3.1.1 ergibt sich sofort eine Charakterisierung gleichmäßig elliptischer Differentialgleichungen für $p = 2$ bzw. $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptischer für $p > 2$.

Korollar 3.1.2:

Es gelten die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V3).

Die Quasibilinearform a ist ($W^{m,2} -$) gleichmäßig elliptisch genau dann, wenn für alle $v, w \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$b(v; w, w) \geq c|w|_{m,2}^2. \quad (3.1.6)$$

Beweis:

Hinlänglichkeit :

Mit $\xi = v + \theta(w-v)$, $\theta \in (0,1)$ gilt

$$a(v, v-w) - a(w, v-w) = b(\xi; v-w, v-w) \geq c \|v-w\|_{m,2}^2 \geq c' \|v-w\|_{m,2}^2.$$

Notwendigkeit :

Mit $\theta_s \in (0,s)$ gilt

$$\begin{aligned} c s^2 |w|_{m,2}^2 &\leq a(v+sw, sw) - a(v, sw) = b(v+\theta_s w; sw, sw) \\ &= s^2 b(v + \theta_s w; w, w) \end{aligned}$$

Division durch s^2 und Grenzübergang $s \rightarrow 0$, also auch $\theta_s \rightarrow 0$, liefern die Behauptung. ▲

Im Anschluß an Korollar 3.1.2 kann sofort eine hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Elliptizität der Quasibilinearform a angegeben werden. In [24] und [25] fordert Frehse beide Bedingungen, siehe (10) und (17) bzw. (13) und (14) in [24] bzw. [25].

Korollar 3.1.3:

Es gelten die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V3).

Weiter sei für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y \in \mathbb{R}^N$

$$|\alpha|, |\beta| \leq m \quad A_{\alpha\beta}(x, y) \xi_\alpha \xi_\beta \geq c \sum_{|\alpha| \leq m} \xi_\alpha^2 \quad (3.1.7)$$

für alle $\xi = (\xi_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \in \mathbb{R}^N$.

Dann ist die Quasibilinearform $a (W^{m,2} -)$ gleichmäßig elliptisch.

Beweis:

Wegen der Monotonie des Integrals folgt aus (3.1.7) und der Definition (3.1.2) die Bedingung (3.1.6). ▲

An zwei Beispielen werden nun die angegebenen Voraussetzungen verifiziert.

Beispiel 3.1.1: (siehe Törnig, [53])

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $0 < c < d$ und

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{c}{d+u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \right) (u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2}) dx_1 dx_2 \quad (3.1.8)$$

mit $u_{x_1} := D^{(1,0)}u$ und $u_{x_2} := D^{(0,1)}u$.

Dann gilt

- i) die Quasibilinearform a erfüllt die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V3) mit $p = 2$;
- ii) sie ist gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten $\eta = 1 - \frac{c}{d}$.

Daraus ergeben sich die Folgerungen :

sei $f \in W^{-1,2}(\Omega)$;

- 1) es existiert genau ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $a(u,v) = (f,v)$ für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$;
- 2) sei $S_0 \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ ein endlichdimensionaler Unterraum, dann existiert genau ein $u_G \in S_0$ mit $a(u_G, v) = (f,v)$ für alle $v \in S_0$;
- 3) es gilt

$$\|u - u_G\|_{1,2} \leq C \inf \{ \|u - v\|_{1,2} : v \in S_0 \}.$$

Beweis:

i) Die Koeffizienten von a aus (3.1.8) sind

$$A_0(x,y) = 0,$$

$$A_\alpha(x,y) = \left(1 - \frac{c}{d+y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2} \right) y_\alpha \quad \text{für } |\alpha| = 1 \quad (3.1.9)$$

mit $y = (y_0, y_{(1,0)}, y_{(0,1)}) \in \mathbb{R}^3$.

Der Nenner

$$N := d + y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2$$

ist für alle $y \in \mathbb{R}^3$ größer gleich $d > 0$, A ist daher unendlich oft stetig nach y_β differenzierbar, womit Bedingung (V1') erfüllt ist.

Wegen

$$|A_\alpha(x, y)| \leq |y_\alpha|$$

ist (V2) erfüllt. Die Ableitungen der A_α ergeben sich zu

$$A_{0,\beta}(x, y) = A_{\beta,0}(x, y) = 0 \text{ für } |\beta| \leq 1,$$

$$A_{(1,0)(1,0)}(x, y) = 1 - c \frac{d + y_{(1,0)}^2 - y_{(0,1)}^2}{N^2},$$

$$A_{(1,0)(0,1)}(x, y) = A_{(0,1)(1,0)}(x, y) = 2c \frac{y_{(1,0)} y_{(0,1)}}{N^2}, \quad (3.1.10)$$

$$A_{(0,1)(0,1)}(x, y) = 1 - c \frac{d - y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2}{N^2},$$

man rechnet sofort nach

$$|A_{\alpha\beta}(x, y)| < 2,$$

und somit ist auch Bedingung (V3) erfüllt.

ii) Die Eigenwerte der Matrix

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} A_{(1,0)(1,0)} & A_{(1,0)(0,1)} \\ A_{(0,1)(1,0)} & A_{(0,1)(0,1)} \end{pmatrix} (x, y) \quad (3.1.11)$$

sind

$$\begin{aligned} \lambda_2(x, y) &= 1 - c \frac{d - y_{(1,0)}^2 - y_{(0,1)}^2}{N^2} \geq \\ \lambda_1(x, y) &= 1 - \frac{c}{N^2} \geq \\ &\geq 1 - \frac{c}{d} > 0 \text{ da } 0 < c < d. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Die Eigenwerte von A sind unabhängig von x und y durch $1 - c/d$ nach unten weg von Null beschränkt, A ist also gleichmäßig positiv definit und aus Korollar 3.1.3 folgt, daß die Quasibilinearform a gleichmäßig elliptisch ist.

Beispiel 3.1.2: (siehe Necas, [41])

Es seien $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $p > 2$ und

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} (1 + \sum_{|\gamma|=1} (D^{\gamma} u)^2)^{(p-2)/2} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx \quad (3.1.13)$$

Dann gilt

i) die Quasibilinearform a erfüllt die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V3);

ii) sie ist koerzitiv bzgl. $\sigma(s) = c s^{p-1}$, es gilt also

$$a(v,v) \geq c \|v\|_{1,p}^p \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega); \quad (3.1.14)$$

iii) sie ist $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptisch mit der Elliptizitätskonstanten $\eta = 1$ und somit auch strikt elliptisch in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Daraus ergeben sich die Folgerungen :

sei $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$;

1) es existiert genau ein $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $a(u,v) = (f,v)$ für alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

2) sei S_0 ein endlichdimensionaler Unterraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$, dann existiert genau ein $u_G \in S_0$ mit $a(u_G, v) = (f, v)$ für alle $v \in S_0$;

3) sind weiter $u, u_G \in W^{1,\infty}(\Omega)$, u_G unabhängig von S_0 beschränkt, so ist

$$\|u - u_G\|_{1,2} \leq c \inf \{ \|u - v\|_{1,2} : v \in S_0 \}. \quad (3.1.15)$$

Beweis:

i) Die Koeffizienten von a aus (3.1.13) sind

$$A_0(x,y) = 0,$$

$$A_{\alpha}(x,y) = (1 + y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2)^{(p-2)/2} y_{\alpha} \quad \text{für } |\alpha| = 1. \quad (3.1.16)$$

Es ist sofort klar, daß die Bedingung (V1') erfüllt ist. (V2) kann man in diesem Fall einfach durch Angabe der höchsten in (3.1.16) auftretenden Potenz von $|y_{\gamma}|$ verifizieren : sie ist wie gefordert $p-1$.

Die Ableitungen der A_α sind

$$A_{0\beta}(x,y) = A_{\beta 0}(x,y) = 0 \text{ für } |\beta| \leq 1,$$

$$A_{\alpha\beta}(x,y) = (p-2) \left(1 + y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2 \right)^{(p-4)/2} y_\alpha y_\beta \\ + \delta_{\alpha\beta} \left(1 + y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2 \right)^{(p-2)/2} \quad (3.1.17)$$

$$\text{mit } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \text{ für } |\alpha| = |\beta| = 1.$$

Hier erhält man, wie gefordert als höchsten Index bei $|y_\gamma|$ $p-2$, (V3) ist damit auch erfüllt.

ii) Zum Nachweis der Koerzitivität von a wird zweimal folgende Ungleichung angewandt :

es sei $s \geq 0$, dann gilt für alle $t > 0$

$$(1 + s)^t \geq s^t.$$

Sei $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt

$$a(v,v) = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} \left(1 + \sum_{|\gamma|=1} (D^\gamma v)^2 \right)^{(p-2)/2} (D^\alpha v)^2 dx \\ \geq \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} \left(\sum_{|\gamma|=1} (D^\gamma v)^2 \right)^{(p-2)/2} (D^\alpha v)^2 dx \\ \geq \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^p dx \\ = \|v\|_{1,p}^p \geq c \|v\|_{1,p}^p = \sigma(\|v\|_{1,p}) \|v\|_{1,p}.$$

iii) Die entsprechend (3.1.11) gebildete Matrix ist hier

$$A(x,y) = (p-2) \left(1 + y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2 \right)^{(p-4)/2} \begin{pmatrix} y_{(1,0)}^2 & y_{(1,0)}y_{(0,1)} \\ y_{(0,1)}y_{(1,0)} & y_{(0,1)}^2 \end{pmatrix} \\ + \left(1 + y_{(1,0)}^2 + y_{(0,1)}^2 \right)^{(p-2)/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind

$$\begin{aligned}\lambda_2(x,y) &= (p-2)(1+y_{(1,0)}^2+y_{(0,1)}^2)^{(p-4)/2}(y_{(1,0)}^2+y_{(0,1)}^2) \\ &\quad + (1+y_{(1,0)}^2+y_{(0,1)}^2)^{(p-2)/2} \\ &\geq \lambda_1(x,y) = ((1+y_{(1,0)}^2+y_{(0,1)}^2)^{(p-2)/2} \\ &\geq 1.\end{aligned}$$

Auch hier sind die Eigenwerte von A unabhängig von x und y nach unten durch 1 beschränkt, A ist also gleichmäßig positiv definit und aus Korollar 3.1.3 folgt, daß die Quasibilinearform a $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptisch. Die Folgerungen 1 und 2 ergeben sich aus den Lemmata 1.3.3 und 2.3.2, Folgerung 3 aus Lemma 1.3.3 und Korollar 3.3.1.

▲

§ 3.2 DER FALL $p = 2$

In diesem Paragraphen werden die L_r - Fehlerabschätzungen für die mittels finiter Elemente gewonnen Näherungslösungen hergeleitet. Dazu seien außer den in § 3.1 angegebenen folgende Voraussetzungen speziell für $p = 2$ erfüllt.

(V4) Die Quasibilinearform a sei gleichmäßig elliptisch in $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Nach Korollar 3.1.2 folgt, daß damit auch die in (3.1.2) definierte Bilinearform b gleichmäßig elliptisch in $W_0^{m,2}(\Omega)$ ist, d.h. für alle v und z aus $W_0^{m,2}(\Omega)$ gilt

$$b(z;v,v) \geq \eta \|v\|_{m,2}^2. \quad (3.2.1)$$

Wie bei der Quasibilinearform a wird nun bei der Bilinearform b eine Lipschitzbedingung für das nichtlinear auftretende Argument gefordert.

(V5) Es existiere eine Konstante $\rho > 0$, so daß für alle

$z_1, z_2 \in B_\rho(u) := \{y \in W_0^{m,2}(\Omega) : \|u-y\|_{m,2} \leq \rho\}$,
für alle $w \in W_0^{m,2}(\Omega)$ und für alle $v \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{m,\infty}(\Omega)$
gilt

$$|b(z_1;v,w) - b(z_2;v,w)| \leq K_8 \|z_1 - z_2\|_{m,2} \|w\|_{m,2} \|v\|_{m,\infty}. \quad (3.2.2)$$

Dabei ist die Konstante K_8 unabhängig von z_1 und z_2 .

Bedingung (V5) ist zum Beispiel erfüllt, wenn die Ableitungen der $A_{\alpha\beta}$ beschränkt sind durch eine Konstante, wie es etwa in Beispiel 3.1.1 der Fall ist.

Im folgenden werden die später benötigten Eigenschaften der Bilinearform b angegeben. Korollar 3.1.2 besagt, daß b auf Grund von (V4) eine auf $W_0^{m,2}(\Omega)$ gleichmäßig elliptische Bilinearform ist, die, wie das folgende Lemma zeigt, die Differenz $a(u, \cdot) - a(u^h, \cdot)$ mit einer Genauigkeit von $O(h^{2(k-m)})$ approximiert.

Lemma 3.2.1:

Die Quasibilinearform a erfülle die Voraussetzungen (V1'), (V2) - (V5).
Es seien $u \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{k,2}(\Omega)$ die exakte und $u^h \in S_0^h$ die finite
Elemente Lösung von (2.1.4) und $z \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{m,\infty}(\Omega)$ beliebig.
Dann existieren ein $\bar{h} \in (0,1)$ und eine von z und u^h unabhängige
Konstante $K_9 > 0$, so daß für alle $h \in (0, \bar{h})$ gilt

$$|b(u; z, u-u^h) + a(u^h, z) - a(u, z)| \leq K_9 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 \|z\|_{m,\infty}. \quad (3.2.3)$$

Beweis:

Die Taylorentwicklung von $a(u, z)$ um u^h liefert

$$a(u, z) = a(u^h, z) + b(\bar{u}; z, u-u^h)$$

mit $\bar{u} = u + \theta(u^h - u)$, $\theta = \theta(z) \in (0,1)$.

Für hinreichend kleines h gilt

$$\|u - \bar{u}\|_{m,2} = \theta \|u - u^h\|_{m,2} < \|u - u^h\|_{m,2} \leq K_5 h^{k-m} \|u\|_{k,2} < \rho.$$

Mit Voraussetzung (V5) folgt dann

$$\begin{aligned} |b(u; z, u-u^h) + a(u^h, z) - a(u, z)| &= \\ &= |b(u; z, u-u^h) - b(\bar{u}; z, u-u^h)| \\ &\leq K_8 \|u - \bar{u}\|_{m,2} \|u - u^h\|_{m,2} \|z\|_{m,\infty} \\ &\leq K_8 K_5^2 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 \|z\|_{m,\infty}. \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2:

Die Quasibilinearform a erfülle die Voraussetzungen (V1'), (V2) - (V4).
Es seien $u \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{k,2}(\Omega)$ die exakte und $u^h \in S_0^h$ die finite
Elemente Lösung von (2.1.4) und $z \in W_0^{m,2}(\Omega)$ beliebig.
Dann existiert eine von z und u^h unabhängige Konstante $K_{10} > 0$,
so daß gilt

$$|a(u, z) - a(u^h, z)| \leq K_{10} h^{k-m} \|u\|_{k,2} \|z - z^h\|_{m,2} \quad (3.2.4)$$

für alle $z^h \in S_0^h$.

Die in (3.2.4) angegebene Abschätzung, eine Art Lipschitzabschätzung, enthält auf der rechten Seite nicht den üblichen Faktor $\|z\|_{m,2}$, sondern $\|z-z^h\|_{m,2}$ mit beliebigem $z^h \in S_0^h$. Durch geeignete Wahl von z^h kann man so eine wesentlich höhere h -Potenz erreichen, als es durch die übliche Lipschitzbedingung möglich ist.

Beweis:

Es sei $z^h \in S_0^h$ beliebig. Wegen $a(u^h, z^h) = a(u, z^h) = (f, z^h)$ und der Linearität von a im zweiten Argument gilt

$$\begin{aligned} a(u, z) - a(u^h, z) &= a(u, z - z^h) - a(u^h, z - z^h) \\ &= b(\tilde{u}; z - z^h, u - u^h) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tilde{u} = u + \theta(u^h - u), \theta \in (0, 1), \quad (3.2.5)$$

was wegen Lemma 3.1.1 abgeschätzt werden kann durch

$$K_7 (\|\tilde{u}\|_{m,2} \|u - u^h\|_{m,2} \|z - z^h\|_{m,2}). \quad (3.2.6)$$

Aus (3.2.5) folgt

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{m,2} &\leq \|u\|_{m,2} + \|u^h\|_{m,2} \\ &\leq \frac{2}{\eta} \|AO-f\|_{-m,2} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

wegen (2.1.9) und (2.3.2). (3.2.6) liefert mit Lemma 2.3.1

$$|a(u, z) - a(u^h, z)| \leq K_{10} h^{k-m} \|u\|_{k,2} \|z - z^h\|_{m,2}$$

für alle $z^h \in S_0^h$, wobei K_{10} wegen (3.2.7) unabhängig von h , u^h und z ist. ▲

Bei den anschließenden Fehlerabschätzungen wird ein Regularitäts - satz für lineare Differentialgleichungen benutzt. Bei dem in [50] angegebenen Satz können die Differenzierbarkeitsforderungen an die Koeffizienten gemäß [13] abgeschwächt werden.

Lemma 3.2.3:

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, $s \in \mathbb{N}_0$, $1 < r \in \mathbb{R}$ beliebig.
Weiter gelte: $\partial\Omega \in C^{2m+s}$ und für die Bilinearform

$$B(v, w) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} b_{\alpha\beta} D^{\alpha} v D^{\beta} w \, dx \quad (3.2.8)$$

mit $v \in W_0^{m, r}(\Omega)$, $w \in W_0^{m, r'}(\Omega)$, $1/r + 1/r' = 1$,

seien $b_{\alpha\beta} \in W^{s+|\alpha|, q_{\beta}}(\Omega)$ für $|\alpha|, |\beta| \leq m$ mit

$$q_{\beta} = \begin{cases} r & \text{für } |\beta| < 2m - n/r \\ \frac{n+\epsilon}{2m-|\beta|} & \text{für } |\beta| \geq 2m - n/r \text{ mit } 0 < \epsilon \text{ beliebig klein.} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Ist B gleichmäßig elliptisch, dann gilt:

für jedes $g \in W^{s, r}(\Omega)$ existiert genau eine Lösung
 $v \in W_0^{m, r}(\Omega) \cap W^{2m+s, r}(\Omega)$ der Differentialgleichung

$$B(v, w) = (g, w) \text{ für alle } w \in W_0^{m, r'}(\Omega) \quad (3.2.10)$$

und

$$\|v\|_{2m+s, r} \leq K_{11} \|g\|_{s, r} \quad (3.2.11)$$

wobei $K_{11} = K_{11}(\Omega, m, s, r)$, aber unabhängig von v und g ist.

Für $s = 0$ erfüllt die Bilinearform $b(z; \dots)$ die Voraussetzungen des obigen Lemmas, wenn $z \in W^{2m, q_m}(\Omega)$ mit

$$q = \begin{cases} r & \text{für } m > n/r \\ n/m + \epsilon & \text{für } m \leq n/r \text{ mit } 0 < \epsilon \text{ beliebig klein} \end{cases}$$

ist. Wegen $W^{2m, q_m}(\Omega) \subset W^{2m, q}(\Omega) \subset C_B^m(\Omega)$ ist

$$D^{\gamma} A_{\alpha\beta}(\cdot, z, \dots, D^m z) \in C_B(\Omega) \text{ für alle } |\alpha|, |\beta| \leq m \text{ und } |\gamma| \leq |\alpha|.$$

Bei der Ableitung von $A_{\alpha\beta}(\cdot, z, \dots, D^m z)$ treten im ungünstigsten Fall
für $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = m$ folgende Terme auf

$D^{\gamma} A_{\alpha\beta}(x, z, \dots, D^m z) \cdot D^{\alpha} z \cdot \prod_{i=2}^m D^{\alpha_i} z$ mit $|\alpha_1| = 2m$, $|\alpha_i| < 2m$ für $i=2(1)m$.
Auf Grund des Lemmas 1.1 aus [12] ist das Produkt aus den $D^{\alpha_i} z$ aus $L^q(\Omega)$.
Die Multiplikation mit der $C_B(\Omega)$ Funktion ändert daran nichts, somit ist
 $A_{\alpha\beta}(\cdot, z, \dots, D^m z) \in W^{|\alpha|, q}(\Omega)$ und wegen $q \geq q_{\beta}$ aus (3.2.9) diese Voraus-
setzung des obigen Lemmas erfüllt.

Bei der Herleitung der angekündigten Fehlerabschätzungen werden nun drei Fälle unterschieden.

- i) Für Ordnung der Differentialgleichung, $2m$, größer als Dimension des Gebietes Ω , n , kann mit Hilfe der oben eingeführten Bilinearform $b(u; \cdot, \cdot)$ der beim Nitsche - Trick übliche Dualitätsschluß zur Abschätzung der L_2 - Norm angewandt werden.
- ii) Ist die Ordnung der Differentialgleichung kleiner gleich der Dimension von Ω , so können, wenn die finiten Elemente eine hinreichend hohe Ordnung k ($k \geq m + [n/2] + 1$) haben, mittels negativer Normen $\| \cdot \|_{-s, 2}$ auch hier L_2 - Fehlerabschätzungen angegeben werden.
- iii) Ist $2m \leq n$ und $k < m + [n/2] + 1$, können nur Fehlerschranken für L_r - Normen mit $1 \leq r < n/(n-m) \leq 2$ hergeleitet werden.

Mit der hier benutzten Vorgehensweise lassen sich die Ergebnisse in iii) nicht verbessern. Grund dafür sind die Sobolev'schen Einbettungssätze, die im Fall $2m \leq n$ nur eine Einbettung von $W^{m, \infty}(\Omega)$ in $W^{2m, t}(\Omega)$ mit $t > n/m$ und nicht in $W^{2m, 2}(\Omega)$ sicher stellen. Ein ähnlicher Effekt tritt bei den L_∞ - Abschätzungen bei Mittelman, [37], auf, wo die Konvergenzordnung mit wachsender Dimension abnimmt. Im Anschluß an die Sätze 3.2.1 - 3.2.3 werden zur Verdeutlichung die Ergebnisse für $n = 1, 2, 3$ angegeben.

Satz 3.2.1.:

Es sei $2m > n$.

Die Quasibilinearform erfülle die Voraussetzungen (V1'), (V2) - (V5). Es seien $f \in W^{-m, 2}(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{2m}$, $S_0^h \subset W_0^{m, 2}(\Omega)$ ein k, m - reguläres System, $u \in W^{k, 2}(\Omega) \cap W^{2m, 2m}(\Omega)$ die exakte und $u^h \in S_0^h$ die finite Elemente Lösung von (2.1.4).

Dann gilt

$$\|u - u^h\|_2 = \begin{cases} O(h^k) & \text{für } k \geq 2m, \\ O(h^{2(k-m)}) & \text{für } k \leq 2m. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Die hier angegebenen Fehlerabschätzungen stimmen mit denen für lineare Differentialgleichungen überein. Die Voraussetzung $\alpha \in C^{2m}$ wird dort ebenso gestellt wie $u \in W^{k,2}(\Omega)$, das die höchst mögliche Konvergenzordnung in der $W^{m,2}$ - Norm sichert. Die zusätzliche Voraussetzung $u \in W^{2m,2\gamma}(\Omega)$ ist bei den polynomialen finiten Elementen keine Einschränkung, sie sorgt mit (V1') dafür, daß die Koeffizienten der Bilinearform $b(u; \cdot, \cdot)$ die Glattheitsforderungen des Regularitätssatzes Lemma 3.2.3 erfüllen.

Beweis des Satzes 3.2.1:

Es seien $h \in (0, \bar{h})$ mit $\bar{h}$ aus Lemma 3.2.1 und $0 \neq g \in L_2(\Omega)$ beliebig. Wegen $u \in W^{2m,2\gamma}(\Omega)$ und $A_\alpha \in C^{|\alpha|+1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ ist

$$A_{\alpha\beta}(\cdot, u, \dots, D^m u) \in W^{|\alpha|,2}(\Omega).$$

Mit $s = 0$ liefert Lemma 3.2.3 die Existenz einer eindeutigen Lösung $z \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{2m,2}(\Omega)$ von

$$b(u; z, v) = (g, v) \quad \text{für alle } v \in W_0^{m,2}(\Omega) \quad \text{und} \quad \|z\|_{2m,2} \leq K_{11} \|g\|_2. \quad (3.2.13)$$

Wegen $u - u^h \in W_0^{m,2}(\Omega)$ gilt dann insbesondere

$$b(u; z, u - u^h) = (g, u - u^h). \quad (3.2.14)$$

Nun kann nicht die bei linearen Differentialgleichungen im Nitsche - Trick übliche Vorgehensweise angewandt werden, da im allgemeinen für $z^h \in S_0^h$

$$b(u; z^h, u - u^h) \neq 0$$

ist. Auch soll hier nicht wie bei Johnson - Thomée, [29], eine Bilinearform

$$B[u, u^h](v, w)$$

konstruiert werden mit

$$B[u, u^h](z^h, u - u^h) = 0 \quad \text{für alle } z^h \in S_0^h.$$

Diese Bilinearform, deren Koeffizienten von u und u^h abhängen, kann nicht statt $b(u; \cdot, \cdot)$ benutzt werden, da die Koeffizienten nicht hinreichend glatt sind. Statt dieser zusätzlich konstruierten Bilinearform wird hier die gegebene Quasibilinearform verwandt.

Ausgehend von (3.2.14) erhält man

$$\begin{aligned} |(g, u - u^h)| &= |b(u; z, u - u^h)| \\ &\leq |b(u; z, u - u^h) - a(u^h, z) + a(u, z)| + |a(u, z) - a(u^h, z)|, \end{aligned}$$

was auf Grund von Lemma 3.2.1 bzw. 3.2.2 für alle $z^h \in S_0^h$ abgeschätzt werden kann durch

$$\leq K_9 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 \|z\|_{m,\infty} + K_{10} h^{k-m} \|u\|_{k,2} \|z - z^h\|_{m,2}. \quad (3.2.15)$$

Da S_0^h ein k, m - reguläres System und $z \in W^{2m,2}(\Omega)$ ist, kann ein z^h so gewählt werden, daß

$$\|z - z^h\|_{m,2} \leq K_4 h^{t-m} \|z\|_{t,2} \text{ mit } t = \min(k, 2m).$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \|z - z^h\|_{m,2} &\leq K_4 \begin{cases} h^{k-m} \|z\|_{k,2} & \text{für } k \leq 2m \\ h^m \|z\|_{2m,2} & \text{für } k \geq 2m \end{cases} \\ &\leq c_1 \begin{cases} h^{k-m} \\ h^m \end{cases} \|z\|_{2m,2}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

da im Falle $k \leq 2m$ $\|z\|_{k,2}$ durch $\|z\|_{2m,2}$ abgeschätzt werden kann.

Weiter liefert wegen $m > n/2$ der Sobolevsche Einbettungssatz 1.1.2

$$\|z\|_{m,\infty} \leq K_5 \|z\|_{2m,2}. \quad (3.2.17)$$

Aus (3.2.15) folgt dann mit (3.2.16) und (3.2.17)

$$|(g, u - u^h)| \leq \{ c_2 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 + c_3 \begin{Bmatrix} h^{2(k-m)} \\ h^k \end{Bmatrix} \|u\|_{k,2} \} \|z\|_{2m,2}.$$

Gemäß (3.2.13) wird $\|z\|_{2m,2}$ durch $K_{11} \|g\|_2$ abgeschätzt. Division durch $\|g\|_2$ liefert

$$\frac{|(g, u - u^h)|}{\|g\|_2} \leq c_4 h^{2(k-m)} + c_5 \begin{Bmatrix} h^{2(k-m)} \\ h^k \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{für } k \leq 2m \\ \text{für } k \geq 2m. \end{matrix} \quad (3.2.18)$$

Die rechte Seite ist nun unabhängig von g , diese Ungleichung bleibt also bestehen, wenn man auf der linken Seite zum Supremum über alle $g \in L_2(\Omega)$ übergeht. Das ergibt gerade

$$\|u - u^h\|_2 = \sup \left\{ \frac{|(g, u - u^h)|}{\|g\|_2} : g \in L_2(\Omega) \right\}. \quad (3.2.19)$$

Wegen $k \leq 2(k-m)$ für $k \geq 2m$ folgt die Behauptung. $\blacktriangle$

Satz 3.2.2:

Es seien $2m \leq n$ und $k \geq m + [n/2] + 1$, $s := [n/2] + 1 - m$.

Die Quasibilinearform a erfülle die Voraussetzungen (V1'), (V2) - (V5), außerdem gelte $A_\alpha \in C^{|\alpha|+1+s}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$, $|\alpha| \leq m$, und $\partial\Omega \in C^{2m+s}$.

Weiter seien $f \in W^{-m,2}(\Omega)$, $S_0^h \subset W_0^{m,2}(\Omega)$ ein k, m -reguläres System, $u \in W^{k,2}(\Omega) \cap W^{2m+s, n+\epsilon}(\Omega)$, $0 < \epsilon$ beliebig klein, die exakte und $u^h \in S_0^h$ die finite Elemente Lösung von (2.1.4).

Dann gilt

$$\|u - u^h\|_2 = O(h^k). \quad (3.2.20)$$

Auch hier erhält man die gleiche Fehlerordnung wie bei linearen Differentialgleichungen, die obige Voraussetzung über k liefert $k \geq 2m$. Die stärkeren Glattheitsbedingungen an A_α , $\partial\Omega$ und u werden benötigt, da der Regularitätssatz Lemma 3.2.3 diesmal mit obigem $s > 0$ angewandt wird. Dadurch erhält man eine Fehlerabschätzung in der $W^{-s,2}$ -Norm und durch Interpolation mit der $W^{m,2}$ -Norm die L_2 -Norm. Ohne diese negativen Norm müßte man sich mit den schwächeren Ergebnissen aus Satz 3.2.3 auch hier zufriedengeben.

Beweis des Satzes 3.2.2:

Auf Grund der oben eingeführten Glattheitsbedingungen ist

$$A_{\alpha\beta}(\cdot, u, \dots, D^m u) \in W^{|\alpha|+s, n/m+\epsilon}(\Omega).$$

Für beliebiges $0 \neq g \in W^{s,2}(\Omega)$ liefert Lemma 3.2.3 die Existenz einer eindeutigen Lösung $z \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{2m+s,2}(\Omega)$ von

$$b(u; z, v) = (g, v) \text{ für alle } v \in W_0^{m,2}(\Omega) \text{ und}$$

$$\|z\|_{2m+s,2} \leq K_{11} \|g\|_{s,2}. \quad (3.2.21)$$

Genau wie im Beweis zu Satz 3.2.1. erhält man entsprechend (3.2.15) für alle $h \in (0, \bar{h})$ und für alle $z^h \in S_0^h$

$$|(g, u - u^h)| \leq K_9 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 \|z\|_{m,\infty} + K_{10} h^{k-m} \|u\|_{k,2} \|z - z^h\|_{m,2}. \quad (3.2.22)$$

Wegen $2m + s = m + [n/2] + 1 > m + n/2$ gilt gemäß des Sobolevschen Einbettungssatzes

$$\|z\|_{m,\infty} \leq K_S \|z\|_{2m+s,2}. \quad (3.2.23)$$

Mit $t = \min(k, 2m+s) = 2m+s$ kann ein $z^h \in S_0^h$ gewählt werden mit

$$\|z - z^h\|_{m,2} \leq K_4 h^{m+s} \|z\|_{2m+s,2}. \quad (3.2.24)$$

Aus (3.2.22) folgt dann mit (3.2.23), (3.2.24) und (3.2.21)

$$|(g, u - u^h)| \leq \{ c_1 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 + c_2 h^{k+s} \|u\|_{k,2} \} \|g\|_{s,2}.$$

Division durch $\|g\|_{s,2}$ und Supremumsbildung über alle $g \in W^{s,2}(\Omega)$ liefert

$$\|u - u^h\|_{-s,2} \leq c_3 h^{k+s},$$

da $2(k-m) \geq k+s$. Die Anwendung von Lemma 1.1.2 mit $r := 0$, $s := -s$ und $t := m$ ergibt

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_2 &\leq K_1 \|u - u^h\|_{-s,2}^{m/(m+s)} \|u - u^h\|_{m,2}^{s/(m+s)} \\ &\leq c_4 h^k. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Satz 3.2.3:

Es seien $2m \leq n$ und $k < m + [n/2] + 1$.

Die Quasibilinearform a erfülle die Voraussetzungen (V1'), (V2) - (V5).

Es seien $\partial\Omega \in C^{2m}$, $f \in W^{-m,2}(\Omega)$, $S_0^h \subset W_0^{m,2}(\Omega)$ ein k, m -reguläres System, $u \in W^{k,2}(\Omega) \cap W^{2m,n+\epsilon}(\Omega)$, $0 < \epsilon$ beliebig klein, die exakte und $u^h \in S_0^h$ die finite Elemente Lösung von (2.1.4).

Dann gilt

$$\|u - u^h\|_r = \begin{cases} O(h^k) & \text{für } k \geq 2m, \\ O(h^{2(k-m)}) & \text{für } k \leq 2m, \end{cases} \quad (3.2.25)$$

$$\text{für alle } 1 \leq r < \frac{n}{n-m}.$$

Auch hier kann wie im Beweis des Satzes 3.2.2 die $W^{m,\infty}$ -Norm nicht durch die $W^{2m,2}$ -Norm abgeschätzt werden. Der Ausweg über die negativen Normen ist hier nicht möglich, da k nicht groß genug ist, siehe (3.2.24). Für das Minimalflächenproblem mit stückweise linearen finiten Elementen haben Johnson - Thomée, [29], das gleiche Ergebnis mit ihrer Methode erhalten. Dort ist speziell $m = n = k = 2$.

Beweis des Satzes 3.2.3:

Wegen $u \in W^{2m, n+\epsilon}(\Omega)$ ist

$$A_{\alpha\beta}(\cdot, u, \dots, D^m u) \in W^{|\alpha|, n/m+\epsilon}(\Omega).$$

Es sei nun $0 \neq g \in L_q(\Omega)$ mit $q = n/m + \epsilon$, $0 < \epsilon$ beliebig klein.

Da $2m \leq n$ und $\epsilon > 0$ sind, ist $q > 2$. Lemma 3.2.3 liefert die Existenz einer eindeutigen Lösung $z \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{2m,q}(\Omega)$ von

$$b(u; z, v) = (g, v) \text{ für alle } v \in W_0^{m,2}(\Omega) \text{ und}$$

$$\|z\|_{2m,q} \leq K_{11} \|g\|_q. \quad (3.2.27)$$

Genau wie vorher erhält man für alle $h \in (0, \bar{h})$ und für alle $z^h \in S_0^h$

$$|(g, u - u^h)| \leq K_9 h^{2(k-m)} \|u\|_{k,2}^2 \|z\|_{m,\infty} + K_{10} h^{k-m} \|u\|_{k,2} \|z - z^h\|_{m,2}. \quad (3.2.28)$$

Gemäß des Sobolev'schen Einbettungssatzes gilt

$$\|z\|_{m,\infty} \leq K_S \|z\|_{2m,q}. \quad (3.2.29)$$

z^h wird wieder geeignet gewählt :

$$\|z - z^h\|_{m,2} \leq K_4 \left\{ \begin{matrix} h^m \\ h^{k-m} \end{matrix} \right\} \|z\|_{2m,2} \leq c_1 \left\{ \begin{matrix} h^m \\ h^{k-m} \end{matrix} \right\} \|z\|_{2m,q} \quad \begin{matrix} k \geq 2m, \\ k \leq 2m, \end{matrix} \quad (3.2.30)$$

da $q > 2$ ist. Aus (3.2.28) folgt dann mit (3.2.29), (3.2.30) und (3.2.27)

$$|(g, u - u^h)| \leq \{c_2 h^{2(k-m)} + c_3 \left\{ \begin{matrix} h^k \\ h^{2(k-m)} \end{matrix} \right\}\} \|g\|_q.$$

Division durch $\|g\|_q$ und Supremumsbildung über alle $g \in L_q(\Omega)$ liefert hier

$$\|u - u^h\|_r \leq c_2 h^{2(k-m)} + c_3 \left\{ \begin{matrix} h^k \\ h^{2(k-m)} \end{matrix} \right\},$$

wobei r der konjugierte Exponent von q ist, also

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q} > 1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n} \quad \text{da } q > \frac{n}{m}$$

und so

$$r < \frac{n}{n-m}.$$

Diskutiert man die Sätze 3.2.1 - 3.2.3 in den besonders wichtigen Fällen $n = 1, 2, 3$, dann ergeben sich folgende Ergebnisse :

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, also $n = 1$, erhält man auf Grund von Satz 3.2.1 immer L_2 - Abschätzungen, es ist $m > n/2$.

Ist $n = 2$ oder $n = 3$, dann ergeben sich für Differentialgleichungen 2. Ordnung und $k = 2$, was stückweise linearen finiten Elementen entspricht, L_r - Abschätzungen mit $r \in [1, 2)$ für $n = 2$ und $r \in [1, 1.5)$ für $n = 3$. Ansonsten erhält man immer L_2 - Abschätzungen, für $m = 1$ und $k \geq 3$ gemäß Satz 3.2.2 und für $m \geq 2$ gemäß Satz 3.2.1.

§ 3.3 DER FALL $p > 2$

Um die in § 1.3 entwickelte Theorie auf $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptische Differentialgleichungen anwenden zu können, müssen nun im Vergleich zu § 3.2 stärkere Voraussetzungen gestellt werden. Zunächst sei die exakte Lösung $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$, was allerdings wesentlich schwächer ist, als die bei den L_∞ - Abschätzungen übliche Forderung, daß u klassische Lösung sei, siehe [25] und [37]. Weiter erfülle die finite Elemente Lösung $u^h \in S_0^h$:

$$(V6) \quad u^h \in W^{m,\infty}(\Omega) \text{ und } \|u^h\|_{m,\infty} \leq K_{12} \text{ unabhängig von } S_0^h. \quad (3.3.1)$$

Für diese Bedingung wird im folgenden ein Beispiel angegeben. Als Raum S_0^h wird dabei der Raum der stückweise linearen finiten Elemente genommen, bei den Randwertaufgaben handelt es sich um Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Koeffizienten etwas stärkeren Wachstumsbedingungen genügen als (V3).

Beispiel 3.3.1:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Ω_h sei ein in Ω enthaltenes, polygonales Gebiet, dessen Ecken auf $\partial\Omega$ liegen und für das gilt: $\text{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_h) \leq c_1 h^2$ mit $0 < h < 1$. Sei nun $\{T_h\}_{h \rightarrow 0}$ eine reguläre Folge von Triangulierungen von Ω_h , d.h. es existiere eine Konstante $\gamma > 0$, so daß jedes Dreieck $\Omega_i \in T_h$, $1 \leq i \leq L(h)$, in einer Kreisscheibe vom Radius h enthalten ist und eine Kreisscheibe vom Radius γh enthält. Der Raum S_0^h sei dann der Raum der stetigen, auf den Dreiecken linearen Funktionen, die auf $\partial\Omega_h$ Null und außerhalb durch Null fortgesetzt sind:

$$S_0^h := \{v^h \in C(\bar{\Omega}) : v^h \text{ linear auf } \Omega_j \in T_h, 1 \leq j \leq L(h), \\ v^h \equiv 0 \text{ auf } \Omega - \Omega_h\}. \quad (3.3.2)$$

Auf Ω wird für $p \in (2,4]$ bei beliebigem $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ die Differentialgleichung

$$a(u,v) := \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} A_\alpha(x,u,Du) D^\alpha v \, dx = (f,v) \\ \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

betrachtet.

Die Quasibilinearform a sei $W^{1,2}$ - gleichmäßig elliptisch und koerzitiv bzgl. σ mit $\sigma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ stetig, $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = \infty$, $\sigma(0) = 0$, σ monoton wachsend. Weiter gelte für die Ableitungen der A_α :

$$|A_{\alpha\beta}(x, y)| \leq c_2 \sum_{|\gamma| \leq 1} |y_\gamma|^{p-2}$$

für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $y \in \mathbb{R}^3$.

Die Differentialgleichungen aus Beispiel 3.1.2 erfüllen für $2 < p \leq 4$ diese Bedingungen. Unter diesen Voraussetzungen existieren eine eindeutige Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und eine eindeutige Galerkin - Lösung $u^h \in S_0^h$ mit

$$\|u\|_{1,p}, \|u^h\|_{1,p} \leq \sigma^{-1}(\|f\|_{-1,p'}). \quad (3.3.3)$$

Ist $u \in W^{3,2}(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$, dann gilt

$$\|u^h\|_{1,\infty} \leq K_{12}(\|u\|_{3,2}, \|u\|_{2,\infty}, \sigma^{-1}(\|f\|_{-1,p'})) \text{ unabhängig von } h.$$

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, daß $\|u - u^h\|_{1,2} \leq c_3 h$ ist. Aus der $W^{1,2}$ - gleichmäßigen Elliptizität von a folgt

$$\begin{aligned} n \|u - u^h\|_{1,2}^2 &\leq a(u, u - u^h) - a(u^h, u - u^h) \\ &= a(u, u - u^h) - a(u^h, u - u^h), \text{ für alle } u^h \in S_0^h, \\ &= b(z; u - u^h, u - u^h) \quad \text{mit } z = u + \theta(u^h - u), \theta \in (0, 1), \\ &\leq c_2 \sum_{|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq 1} \int_\Omega |D^\gamma z|^{p-2} |D^\alpha(u - u^h)| |D^\beta(u - u^h)| dx \\ &\leq c_3 \|z\|_{1,2(p-2)}^{p-2} \|u - u^h\|_{1,\infty} \|u - u^h\|_{1,2}. \end{aligned}$$

Für $p \leq 4$ ist $2(p-2) \leq p$ und somit ist, da z Konvexkombination von u und u^h ist, auch

$$\|z\|_{1,2(p-2)} \leq c_4 \sigma^{-1}(\|f\|_{-1,p'})$$

mit einer von p und Ω abhängigen Konstanten c_4 .

Wählt man u^h als S_0^h - Interpolierende von u , so ist, siehe Nitsche, [43],

$$\|u - u^h\|_{1,\infty} \leq c_5 h \|u\|_{2,\infty}, \quad c_5 \text{ unabhängig von } h.$$

Mit einer von h unabhängigen Konstanten c_6 gilt schließlich

$$\|u - u^h\|_{1,2} \leq c_6 h \|u\|_{2,\infty}. \quad (3.3.4)$$

Die Beschränktheit von u^h in der $W^{1,\infty}$ -Norm ergibt sich nun wie folgt aus einer Sobolev'schen Ungleichung.

Da u_x^h und u_y^h auf jedem Dreieck $\Omega_i \in T_h$ konstant sind, gilt für $|a| = 1$:

$$\|D^a u^h\|_{\infty, \Omega_h} = \max\{|D^a u^h(x,y)| : (x,y) \in \Omega_i \text{ beliebig, } 1 \leq i \leq L(h)\}.$$

Wegen der Fortsetzung von u^h auf Ω durch Null ist

$$\|u^h\|_{1,\infty,\Omega} = \|u^h\|_{1,\infty,\Omega_h}.$$

Zur Abschätzung von $D^a u^h(x,y)$ wird nun eine Sobolev'sche Ungleichung angewandt, siehe etwa Natterer, [40], Seite 76; es sei $(x,y) \in \Omega_j$:

$$\begin{aligned} |D^a u^h(x,y)| &\leq |D^a u(x,y)| + |D^a(u-u^h)(x,y)| \\ &\leq \|u\|_{1,\infty} + C(\gamma)\{h^{-1} \|D^a(u-u^h)\|_{2,\Omega_j} + |D^a(u-u^h)|_{1,2,\Omega_j} + h|D^a u|_{2,2,\Omega_j}\} \\ &\leq \|u\|_{1,\infty} + C(\gamma)\{h^{-1} \|u-u^h\|_{1,2,\Omega_j} + |u|_{2,2,\Omega_j} + h|u|_{3,2,\Omega_j}\}, \end{aligned}$$

da $D^\beta u^h = 0$ für $|\beta| \geq 2$. Wegen (3.3.4) und $\|\cdot\|_{2,\Omega_j} \leq \|\cdot\|_{2,\Omega}$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} |D^a u^h(x,y)| &\leq \|u\|_{1,\infty} + C^*(\gamma)\{\|u\|_{2,\infty} + |u|_{2,2} + h|u|_{3,2}\} \\ &\leq c_7 \cdot (\|u\|_{2,\infty} + \|u\|_{3,2}) \end{aligned}$$

mit c_7 unabhängig von h , da $h < 1$ ist. c_7 ist außerdem unabhängig von j und a , es gilt somit

$$\|u^h\|_{1,\infty} \leq c_7. \quad (3.3.5)$$

Weiter ist $\|u^h\|_{\infty} \leq K_S \|u^h\|_{1,p} \leq K_S e^{-1}(\|f\|_{-1,p}) := c_8$

mit c_8 unabhängig von h und schließlich

$$\|u^h\|_{1,\infty} \leq K_{12} = \max(c_7, c_8).$$

Damit ist u^h in der $W^{1,\infty}$ -Norm unabhängig von h beschränkt. $\blacktriangle$

Unter der Voraussetzung (V6) läßt sich nun zeigen, daß (1.3.8) aus Lemma 1.3.3 erfüllt ist und die dort angegebene Fehlerabschätzung in der $W^{m,2}$ -Norm gilt. Dabei kann wegen $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$ und (V6) auf Grund von (V1') in diesem Paragraphen auf die Wachstumsbeschränkung (V3) für die Ableitungen der Koeffizienten A_α verzichtet werden.

Korollar 3.3.1:

Es seien die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V6) erfüllt,
weiter sei $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$.

Dann existiert eine von h und u^h unabhängige Konstante K_{13} ,
so daß für alle $v \in W_0^{m,p}(\Omega)$ gilt

$$|a(u,v) - a(u^h,v)| \leq K_{13} \|u - u^h\|_{m,2} \|v\|_{m,2}. \quad (3.3.7)$$

Beweis:

Wie beim Beweis von Lemma 3.2.2 zeigt man

$$a(u,v) - a(u^h,v) = b(\tilde{u}; v, u - u^h)$$

mit $\tilde{u} = u + \theta(u^h - u) \in W^{m,\infty}(\Omega)$, $\theta \in (0,1)$, und

$$\|\tilde{u}\|_{m,\infty} \leq 2 \|u\|_{m,\infty} + K_{12}. \quad (3.3.8)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |a(u,v) - a(u^h,v)| &= |b(\tilde{u}; v, u - u^h)| \\ &\leq c_1 \|u - u^h\|_{m,2} \|v\|_{m,2} \\ \text{mit } c_1 &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|A_{\alpha\beta}(\cdot, \tilde{u}, \dots, D^m \tilde{u})\|_{\infty} \leq K_{13}, \end{aligned}$$

wobei K_{13} wegen (3.3.8) unabhängig von h und u^h ist. ▲

Die in § 3.2 benutzte gleichmäßige Elliptizität wird nun durch zwei andere Forderungen ersetzt. Es gelte in diesem Paragraphen

(V4') Die Quasibilinearform a sei $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptisch
und koerzitiv in $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Diese Voraussetzung sichert mit (V1) und (V2) Existenz und Eindeutigkeit sowohl der exakten als auch der finite Elemente Lösung, siehe Lemma 1.3.3. Zusammen mit Lemma 1.3.3 iii) kann dann die Fehlerabschätzung in der $W^{m,2}$ - Norm angegeben werden.

Korollar 3.3.2:

Die Voraussetzungen des Korollars 3.3.1 seien erfüllt, ebenso (V4').

S_0^h sei ein k, m - reguläres System.

Dann gilt mit $u \in W_0^{k,2}(\Omega)$

$$\|u - u^h\|_{m,2} \leq K_6 h^{k-m} \|u\|_{k,2}. \quad (3.3.9)$$

Voraussetzung (V5) aus § 3.2 kann abgeschwächt werden, sie braucht nur noch für Funktionen $z_1, z_2 \in W_0^{m,\infty}(\Omega)$ aus einer Umgebung der exakten Lösung zu gelten.

(V5') Es existiere eine Konstante $\tau > 0$, so daß für alle

$$z_1, z_2 \in V_\tau(u) := \{y \in W_0^{m,\infty}(\Omega) : \|u - y\|_{m,2} \leq \tau\},$$

für alle $w \in W_0^{m,2}(\Omega)$ und für alle $v \in W_0^{m,2}(\Omega) \cap W^{m,\infty}(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} & |b(z_1; v, w) - b(z_2; v, w)| \\ & \leq K_{14} \|z_1 - z_2\|_{m,2} \|w\|_{m,2} \|v\|_{m,\infty}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Dabei sei die Konstante K_{14} unabhängig von z_1, z_2 .

Beispiel 3.1.2 erfüllt, wie man sich leicht überlegt, auch diese Bedingung.

Die Bilinearform $b(u; \dots)$ ist zunächst nur für Funktionen aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ definiert. Setzt man aber wie hier $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$ voraus, so läßt sich zeigen, daß sie sogar eine stetige und gleichmäßig elliptische Bilinearform auf $W_0^{m,2}(\Omega)$ ist.

Lemma 3.3.1:

Es gelten die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V4').

Es sei $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$.

Dann gilt

- i) $b(u; \dots)$ ist eine stetige Bilinearform auf $W_0^{m,2}(\Omega) \times W_0^{m,2}(\Omega)$, d.h. es existiert eine Konstante $K_{15} > 0$, so daß für alle $v, w \in W_0^{m,2}(\Omega)$ gilt

$$|b(u; v, w)| \leq K_{15} \|v\|_{m,2} \|w\|_{m,2}. \quad (3.3.11)$$

- ii) $b(u; \dots)$ ist gleichmäßig elliptisch auf $W_0^{m,2}(\Omega)$,
d.h. es existiert eine Konstante $K_{16} > 0$, so daß für
alle $v \in W_0^{m,2}(\Omega)$ gilt

$$b(u; v, v) \geq K_{16} \|v\|_{m,2}^2. \quad (3.3.12)$$

Beweis:

- i) Wegen $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$ ist $A_{\alpha\beta}(\cdot, u, \dots, D^m u) \in L_\infty(\Omega)$, die Integrale

$$\int_{\Omega} A_{\alpha\beta}(x, u, \dots, D^m u) D^\alpha v D^\beta w \, dx$$

existieren somit für alle $v, w \in W^{m,2}(\Omega)$ und es gilt

$$\begin{aligned} |b(u; v, w)| &\leq \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_{\Omega} |A_{\alpha\beta}(x, u, \dots, D^m u)| |D^\alpha v D^\beta w| \, dx \\ &\leq K_{15} \|v\|_{m,2} \|w\|_{m,2} \end{aligned}$$

$$\text{mit } K_{15} = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \|A_{\alpha\beta}(\cdot, u, \dots, D^m u)\|_{\infty}.$$

- ii) Aus Korollar 3.1.2 ist bekannt, daß $b(u; \dots)$ auf $W_0^{m,p}(\Omega)$
 $W^{m,2}$ - gleichmäßig elliptisch ist, d.h.

$$b(u; v, v) \geq K_{16} \|v\|_{m,2}^2 \text{ für alle } v \in W_0^{m,p}(\Omega). \quad (3.3.13)$$

Sei nun $v \in W_0^{m,2}(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $\{v_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$,
 $v_\nu \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|v - v_\nu\|_{m,2} = 0$.

Die v_ν sind insbesondere aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ und auf Grund von (3.3.13)
gilt dann

$$b(u; v_\nu, v_\nu) \geq K_{16} \|v_\nu\|_{m,2}^2.$$

Der Grenzübergang $\nu \rightarrow \infty$ liefert wegen der in i) gezeigten Stetig-
keit von $b(u; \dots)$ auf $W_0^{m,2}(\Omega) \times W_0^{m,2}(\Omega)$ die Behauptung.

Unter den in diesem Paragraphen angegebenen stärkeren Voraussetzungen
an die Differentialgleichung und an die finiten Elemente, insbesondere
 $u, u^h \in W^{m,\infty}(\Omega)$ und (V6), lassen sich diese Probleme genau wie die
Differentialgleichungen in $W_0^{m,2}(\Omega)$ behandeln. Es gelten die ent-
sprechenden Ergebnisse wie dort, die nun abschließend formuliert
werden. Auf die Beweise, bei denen Korollar 3.3.2 an Stelle von Lemma
2.3.1 benutzt wird, kann verzichtet werden.

Satz 3.3.1:

Die Quasibilinearform erfülle die Voraussetzungen (V1'), (V2), (V4'), (V5'). Es seien $S_0^h \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ ein k, m -reguläres System, $u, u^h \in W^{m,\infty}(\Omega)$ mit (V6) die exakte bzw. die finite Elemente Lösung von (2.1.4).

i) Es seien $2m > n$, $\partial\Omega \in C^{2m}$ und $u \in W^{k,2}(\Omega) \cap W^{2m,2m}(\Omega)$.

Dann gilt

$$\|u - u^h\|_2 = \begin{cases} O(h^k) & \text{für } k \geq 2m, \\ O(h^{2(k-m)}) & \text{für } k \leq 2m. \end{cases} \quad (3.3.14)$$

ii) Es seien $2m \leq n$ und $k \geq m + [n/2] + 1$, $s := [n/2] + 1 - m$,

$\partial\Omega \in C^{2m+s}$, $A_\alpha \in C^{|\alpha|+1+s}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ und

$u \in W^{k,2}(\Omega) \cap W^{2m+s,n+\epsilon}(\Omega)$ mit $0 < \epsilon$ beliebig klein.

Dann gilt

$$\|u - u^h\|_2 = O(h^k). \quad (3.3.15)$$

iii) Es seien $2m \leq n$ und $k < m + [n/2] + 1$, $\partial\Omega \in C^{2m}$ und

$u \in W^{k,2}(\Omega) \cap W^{2m,n+\epsilon}(\Omega)$ mit $0 < \epsilon$ beliebig klein.

Dann gilt

$$\|u - u^h\|_r = \begin{cases} O(h^k) & \text{für } k \geq 2m, \\ O(h^{2(k-m)}) & \text{für } k \leq 2m, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

mit $1 \leq r < n/(n-m)$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Adams, R.A., Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975
- [2] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965
- [3] Ansorge, R., Törnig, W., Numerische, insbesondere approximations - theoretische Behandlung von Funktionalgleichungen, Springer LNM 333, Berlin - Heidelberg - New York, 1973
- [4] Aziz, A.K., The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations, Academic Press, New York - London, 1972
- [5] Babuska, I., Aziz, A.K., Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, erschienen in [4], 1972
- [6] Bramble, J.H., Nitsche, J.A., A generalized Ritz - least - squares method for Dirichlet problems, SIAM J. Num. Anal., 10, 81 - 93, 1973
- [7] Bramble, J.H., Nitsche, J.A., Schatz, A.H., Maximum - norm - interior estimates for Ritz - Galerkin methods, Math. Comp., 29, 677 - 688, 1975
- [8] Bramble, J.H., Schatz, A.H., Least squares methods for $2m$ - th order elliptic boundary - value - problems, Math. Comp., 25, 1 - 32, 1971
- [9] Bramble, J.H., Thomée, V., Interior maximum norm estimates for some simple finite element methods, RAIRO, 8, 5 - 18, 1974
- [10] Brezis, H., Monotone operators, nonlinear semigroups and applications, erschienen in [52], 249 - 255, 1975
- [11] Brezis, H., Sibony, M., Méthodes d'approximation et d'application pour les opérateurs monotones, Arch. Rat. Mech. Anal., 28, 59 - 82, 1968
- [12] Brish, N.I., Yashkina, I.N., Dirichlet's problem for elliptic equations with unbounded lowest - order coefficients, I, Differential Equations, 6, 1240 - 1248, 1970
- [13] Brish, N.I., Yashkina, I.N., Dirichlet's problem for elliptic equations with unbounded lowest - order coefficients, II, Differential Equations, 6, 1536 - 1541, 1970

- [14] Browder, F.E., Existence and uniqueness- theorems for solutions of nonlinear boundary value problems, Proc. AMS Symposia in Appl. Math., 17, 24 - 49, 1965
- [15] Browder, F.E., Problèmes non - linéaires, Les Presses de l' Université, Montréal, 1966
- [16] Browder, F.E., Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations, Bull. AMS, 74, 651 - 656, 1968
- [17] Carroll, R.W., Abstract methods in partial differential equations, Harper&Row, New York, 1969
- [18] Choquet - Bruhat, Y., Distributions, théorie et problèmes, Masson&Cie, Paris, 1973
- [19] Ciarlet, P.G., Numerical analysis of the finite element method, Séminaire de Math. Sup., Montréal, 1975
- [20] Ciarlet, P.G., Raviart, P.A., General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods, Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 177 - 199, 1972
- [21] Ciarlet, P.G., Raviart, P.A., Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 2, 17 - 31, 1973
- [22] Ciarlet, P.G., Schultz, M.H., Varga, R.S., Numerical methods of high - order accuracy for nonlinear boundary value problems, V : Monotone operator theory, Numer. Math., 13, 51 - 77, 1969
- [23] Douglas, J.Jr., Dupont, T., A Galerkin method for a nonlinear Dirichlet problem, Math. Comp., 29, 689 - 696, 1975
- [24] Frehse, J., Eine a - priori - Abschätzung zur Methode der finiten Elemente in der Variationsrechnung, Bonner Math. Schriften, 77, 115 - 126, 1975
- [25] Frehse, J., Eine gleichmäßige asymptotische Fehlerabschätzung zur Methode der finiten Elemente bei quasilinearen elliptischen Randwertproblemen, Preprint 71, Bonn, 1975
- [26] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K., Nichtlineare Operator - gleichungen und Operatordifferentialgleichungen, Akademie - Verlag, Berlin, 1974

- [27] Gossez, J.P., Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients, Trans. AMS, 190, 163 - 205, 1974
- [28] Hirzebruch, F., Scharlau, W., Einführung in die Funktionalanalysis, B.I., Mannheim, 1971
- [29] Johnson, C., Thomée, V., Error estimates for a finite element approximation of a minimal surface, Math. Comp., 29, 343 - 349, 1975
- [30] Krasnoselskii, M.A., Zabreiko, P.P., Pustyl'nik, P.E., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff Int. Publ., Leyden, 1976
- [31] Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N., Linear and nonlinear elliptic equations, Academic Press, New York, 1968
- [32] Lebaud, G., Sur l'approximation de l'équation

$$Au = - \sum_{i=1}^n D_i (|D_i u|^{p-2} D_i u) = T,$$
Rendiconti Mat., 2, 483 - 471, 1969
- [33] Leray, J., Lions, J.L., Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty - Browder, Bull. Soc. Math. France, 93, 97 - 107, 1965
- [34] Lions, J.L., Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969
- [35] Mansfield, L., Higher order compatible finite elements, Numer. Math., 22, 85 - 97, 1974
- [36] Michlin, S.G., Numerische Realisierung von Variationsmethoden, Akademie - Verlag, Berlin, 1969
- [37] Mittelman, H.D., On pointwise estimates for a finite element solution of nonlinear boundary value problems, Preprint 207, Darmstadt, 1975
- [38] Miyoshi, T., On the convergence of Ritz - Galerkin's method, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 4, 149 - 177, 1968
- [39] Morrey, C.B., Multiple integrals in the calculus of variations, Springer, Berlin, 1966

- [40] Natterer, F., Über die punktweise Konvergenz Finiter Elemente, Numer. Math., 25, 67 - 77, 1975
- [41] Necas, J., Les équations elliptiques non linéaires, Czech. Math. J., 19, 252 - 274, 1969
- [42] Nitsche, J.A., Ein Kriterium für die Quasioptimalität des Ritzschen Verfahrens, Numer. Math., 11, 346 - 348, 1968
- [43] Nitsche, J.A., Lineare Spline - Funktionen und die Methode von Ritz für elliptische Randwertaufgaben, Arch. Rational Mech. Anal., 36, 348 - 355, 1970
- [44] Nitsche, J.A., On Dirichlet problems using subspaces with nearly zero boundary conditions, 603 - 627, erschienen in [4], 1972
- [45] Nitsche, J.A., Schatz, A.H., Interior estimates for Ritz - Galerkin methods, Math. Comp., 28, 937 - 958, 1974
- [46] Proceedings of the international congress of mathematicians, Vancouver, 1974, Canadian Math. Congress, 1975
- [47] Rvachev, B.L., Shklyarov, L.I., On the application of the Bubnov - Galerkin method to the solution of boundary problems for domains of complex shape, Diff. Equ., 1, 1211 - 1220, 1965
- [48] Schultz, M.H., Rayleigh - Ritz - Galerkin methods for multi - dimensional problems, SIAM J. Num. Anal., 6, 523 - 538, 1969
- [49] Schultz, M.H., L^2 error estimates for the Rayleigh - Ritz - Galerkin method, SIAM J. Num. Anal., 8, 737 - 748, 1972
- [50] Simader, C.G., On Dirichlet's boundary value problem, LNM 268, Springer, Berlin, 1972
- [51] Strang, G., The finite element method - linear and nonlinear applications, 429 - 435, erschienen in [46], 1975
- [52] Strang, G., Fix, G., An analysis of the finite element method, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973
- [53] Törnig, W., Monotonieigenschaften von Diskretisierungen des Dirichletproblems quasilinearer Differentialgleichungen, erschienen in [3], 1973

- [54] Vainberg, M.M., Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden - Day, San Fransisco, 1964
- [55] Vainberg, M.M., Variational methods and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, John Wiley & Sons, New York, 1973
- [55] Varga, R.S., Functional analysis and approximation theory in numerical analysis, SIAM Regional Conf. Ser. Appl. Math. 3, 1971
- [57] Visik, M.I., Solvability of the first boundary value problem for quasilinear equations with rapidly increasing coefficients in Orlicz spaces, Soviet Math. Dokl., 151, 1060 - 1064, 1963
- [58] Whiteman, J.R., A bibliography for finite elements, Academic Press, London, 1975
- [59] Yosida, K., Functional analysis, Springer, Berlin, 1971
- [60] Zenisek, A., A general theorem on trianglar finite $C^{(m)}$ - elements, RAIRO, 8, 119 - 128, 1974
- [61] Rannacher, R., Some asymptotic error estimates for finite element approximation of minimal surfaces, Preprint 87, Bonn, 1976

LEBENS LAUF

Am 2.3.1949 wurde ich, Alfred Louis, als Sohn des Richard Louis und dessen Ehefrau Maria, geb. Arend, in Elversberg / Saar geboren. Von 1955 - 1960 besuchte ich die kath. Volksschule in Elversberg, von der ich Ostern 1960 zum Staatlichen Realgymnasium Sulzbach / Saar wechselte. Dort legte ich 1968 die Reifeprüfung ab.

Vom Wintersemester 1968 / 69 bis zum Wintersemester 1972 / 73 studierte ich an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken Mathematik und Physik. Im Dezember 1972 legte ich dort die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Vom 1.1.1973 bis zum 14.9.1973 war ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Angewandte Mathematik und Informatik der Universität des Saarlandes in Saarbrücken. Seit dem 15.9.1973 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg - Universität in Mainz.

Seit dem 28.7.1972 bin ich mit Gertrud Louis, geb. Krause, verheiratet.

